

אלגברה ב2

© ארזים

6 ביוני 2017

1 הרחבות נעלות

נמשיך מאיפה שעצרנו.

טענה 1.1 תהי L/K הרחבת שדות, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subseteq L$, $\omega \in L$ אם ω תלוי אלגברית בקבוצה $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ אבל לא תלוי אלגברית בקבוצה $\{\alpha_2, \dots, \alpha_m\}$, אז α_1 תלוי אלגברית $\{\omega, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$.

הוכחה: יש $f(x_1, \dots, x_m, y) \in K[x_1, \dots, x_m, y]$ שמקיים

$$\begin{aligned} f(\alpha_1, \dots, \alpha_m, y) &\neq 0 \\ f(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \omega) &= 0 \end{aligned}$$

נרשום

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=0}^d a_i(x_2, \dots, x_m, y) x_1^i$$

מתקיים $f(\alpha_1, \dots, \alpha_m, y) \neq 0$ ולכן קיים i עבורו $a_i(\alpha_2, \dots, \alpha_m, y) \neq 0$. ω בלתי תלוי אלגברית בקבוצה $\{\alpha_2, \dots, \alpha_m\}$, ולכן בהכרח $a_i(\alpha_2, \dots, \alpha_m, \omega) \neq 0$ (אחרת זה היה נותן תלות אלגברית). לכן

$$f(x_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \omega) \neq 0$$

■

וסיימנו (כי פולינום זה מתאפס כשמציבים בתור x_1 את α_1).

למה 1.2 תהינה $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}, B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \subseteq L$. נניח כי A בלתי תלוייה אלגברית מעל K , אבל תלוייה באלגברית בקבוצה B . אזי $m \leq n$.

הוכחה: יהי k מספר האיברים בתוך $A \cap B$. אם $k = m$ אזי $m = k \leq n$ וסיימנו. נניח כעת כי $k < m$ ונמשיך באינדוקציה על $m - k$. נרשום $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_{k+1}, \dots, \beta_n\}$. עתה, $\alpha_{k+1} \in A$ ולכן תלוי אלגברית בקבוצה B . אבל הוא לא תלוי אלגברית בקבוצה $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ - כלומר יש j כך $k+1 \leq j$ שהאיבר α_{k+1} תלוי אלגברית בקבוצה $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_{k+1}, \dots, \beta_j\}$.

אבל לא תלוי בקבוצה $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_{k+1}, \dots, \beta_{j-1}\}$. לפי הטענה הקודמת נקבל כי β_j תלוי אלגברית בקבוצה $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_{k+1}, \dots, \beta_{j-1}, \alpha_{k+1}\}$. נגדיר $B' = B \setminus \{\beta_j\} \cup \{\alpha_{k+1}\}$. ואז $|B'| = n$ וכן $|A \cap B'| = k + 1$. עדיין תלוייה אלגברית מעל B' . לכן מהאינדוקציה נקבל $m \leq n$. ■

מסקנה 1.3 תהי L/K הרחבת שדות. אזי לכל בסיסי הנעלות של L מעל K יש את אותה עוצמה. נסמן עוצמה זו

$$\text{tr deg}(L/K)$$

ונקרא לה מעלת הנעלות של L/K .

הוכחה: במקרה הסופי, יהיו A, B שני בסיסי נעלות שאחד מהם סופי (בלי הגבלת הכלליות A). לפי הלמה הקודמת, היות והקבוצה B אלגברית מעל $K(A)$, אז כל תת קבוצה סופית של B היא בגודל $|A|$ לכל היותר. לכן $|B| \leq |A|$. מסימטריה נקבל $|B| = |A|$. המקרה האינסופי דומה ולא נדון בו בקורס. ■

דוגמאות $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}(x)$. לכל n , $x^n \in L$ הוא בסיס נעלות, אבל $\mathbb{C}(x)/\mathbb{C}(x^n)$ ממעלה n - אז המעלה של ההרחבה האלגברית שנותרת אינה קבועה.

טענה 1.4 נניח כי $L = K(A)$, כאשר $A \subseteq L$ כלשהי. אזי יש בסיס נעלות $A_0 \subseteq A$.

הוכחה: נקח $A_0 \subseteq A$ בלתי תלוייה אלגברית מקסימלית (מהלמה של צורן, כמו שעשינו בעבר). אז $K(A)/K(A_0)$ אלגברית (כי אחרת אפשר להרחיב את A_0) ולכן A_0 בסיס נעלות. ■

מסקנה 1.5 אם $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, וכן $\text{tr deg}(L/K) = n$, אזי $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ הם בסיס נעלות.

הוכחה: יש תת קבוצה שהיא בסיס, וגודלה הוא n , ולכן היא שווה לכל הקבוצה. ■

2 הפולינום הגנרי

הגדרה 2.1 יהיו $A_0, \dots, A_{n-1}$ משתנים מעל K . נגדיר

$$f(x) = x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_0$$

נקרא לפולינום f הפולינום הגנרי המתוקן ממעלה n . נוסחאת שורשים גנרית היא נוסחא לפולינום הגנרי, ואז לכל פולינום עם מקדמים בתוך K נוסחאת השורשים תהיה הצבה בנוסחאת השורשים הגנרית.

משפט 2.2 יש נוסחא גנרית אם ורק אם $n \leq 4$.

הוכחה: די להוכיח כי $S_n = \text{Gal}(f/K(A_0, \dots, A_{n+1}))$ שכן S_1, S_2, S_3, S_4 פתירות, בעוד S_n עבור $n \geq 5$ לא פתירות.

נבחר $x_1, \dots, x_n$ משתנים. S_n פועלת על $K(x_1, \dots, x_n)$ על ידי

$$\begin{aligned}\sigma(x_i) &= x_{\sigma(i)} \\ \sigma|_K &= \text{Id}\end{aligned}$$

נתבונן בשדה השבת:

$$E = K(x_1, \dots, x_n)^{S_n}$$

ונסמן

$$s_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \prod_{j=1}^k x_{i_j}$$

עם $s_0 = 0$ אז בבירור

$$s_k \in E$$

לכל k . כמובן, $\text{Gal}(K(x)/E) = S_n$. כמו כן,

$$f(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i) = \sum_{i=0}^n (-1)^i s_i \cdot x^i$$

לכן $K(x)$ הוא שדה הפיצול של $f(x)$ מעל $K(s_1, \dots, s_n)$, שמוכל בתוך E . לכן

$$n! [E : K(s_1, \dots, s_n)] = [K(x_1, \dots, x_n) : E] [E : K(s_1, \dots, s_n)] = [K(x_1, \dots, x_n) : K(s_1, \dots, s_n)] \leq n!$$

מכאן נקבל כמה דברים: ראשית,

$$E = K(s_1, \dots, s_n)$$

כמו כן,

$$S_n = \text{Gal}(K(x_1, \dots, x_n)/K(s_1, \dots, s_n))$$

■