

אלגברה ב2

© ארזים

23 במאי 2017

1 משפט גלואה

תזכורות

1. אנחנו אומרים כי לפולינום f יש נוסחת שורשים מעל K אם יש מגדל של שדות $K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_n$ כך שמעל K_n , f מתפצל, וכן $K_{i+1} = K_i[\alpha_i]$ עבור $\alpha_i \in K_i$ שמקיים $\alpha_i^{n_i} \in K_i$ עבור n_i כלשהו.
2. $\text{Gal}(f/K) = \text{Gal}(N/K)$, כאשר N שדה הפיצול של f .
3. G פתירה אם קיימת סדרה

$$1 = G_n \triangleleft G_{n-1} \triangleleft \dots \triangleleft G_0 = G$$

כאשר G_{i+1}/G_i מעגלית. לחילופין, אפשר לדרוש $G_i \triangleleft G$, אבל אז המנות צריכות להיות רק אבליות.

משפט 1.1 (משפט גלואה) יהי $f \in K[x]$ פולינום ממעלה חיובית מעל שדה K מאיפיון 0. אזי יש לו נוסחת שורשים אם ורק אם $\text{Gal}(f/K)$ פתירה.

הוכחה: נניח כי $G = \text{Gal}(f/K)$ פתירה, ונסמן N את שדה הפיצול של f . נוסיף אל K את שורשי היחידה מסדר n (את החבורה שהם יוצרים סימנו μ_n). נסמן

$$K_0 = K, K_1 = K[\mu_n]$$

ואז ראינו כי

$$\text{Gal}(N(\mu_n)/K(\mu_n)) \cong \underbrace{\text{Gal}(N/K(\mu_n) \cap N)}_H \leq G$$

לכן גם H פתירה, כי תת חבורה של חבורה פתירה היא פתירה. לכן די למצוא מגדל מתאים בין K_1 אל $N(\mu_n)$, ולכן נוכל בלי הגבלת הכלליות להחליף את K המקורים עם K_1 , ואת N עם $N(\mu_n)$, כלומר בלי הגבלת הכלליות, $\mu_n \subseteq K, N$. נקח שדות שבת לסדרה

$$1 \triangleleft G_n \triangleleft \dots \triangleleft G_0 = G$$

עם G_i/G_{i+1} מעגליות. נסמן $K_i = N^{G_i}$ ונקבל

$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_n = N$$

אזי $K_i \subseteq K_{i+1}$ היא גלואה, כי $G_{i+1} \triangleleft G_i$, והיא מעגלית כי $G_i/G_{i+1} \cong \text{Gal}(K_{i+1}/K_i)$, והסדר שלה, n_i , מחלק את $n = |G|$. כיוון שמתקיים $\mu_n \subseteq K_i$, ראינו שמתקיים $K_{i+1} = K_i[\alpha_i]$, כאשר $\alpha_i^{n_i} \in K_i$. לכן יש נוסחת שורשים עבור f . בכיוון השני, נתון f ונתון מגדל

$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_n$$

כך שמעל K_n f מתפצל, וכן $K_{i+1} = K_i[\alpha_i]$ כאשר $\alpha_i^{n_i} \in K_i$. נרצה להראות שהחבורה G פתירה. נשים לב שנובע ששדה הפיצול N של f מוכל בתוך K_n , וגם בתוך L_n , סגור גלואה של K_n/K . לכן

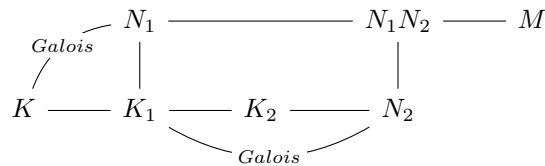
$$\text{res} : \text{Gal}(L_n/K) \twoheadrightarrow \text{Gal}(N/K)$$

ואם נראה שהחבורה השמאלית פתירה, נקבל שהימנית גם, כי מנה של פתירה היא פתירה. לכן די להוכיח כי $\text{Gal}(L_n/K)$ פתירה. ניתן הגדרה לשם הנוחות:

הגדרה 1.2 הרחבה L/K נקראת פתירה אם חבורת גלואה של סגור גלואה שלה היא פתירה.

למה 1.3 אם יש מגדל $K \subseteq K_1 \subseteq K_2$, כאשר K_1/K , K_2/K_1 שניהן פתירות, אזי K_2/K פתירה.

הוכחה: נסמן N_1 את סגור גלואה של K_1 מעל K , N_2 את סגור גלואה של K_2 מעל K_1 , M את סגור גלואה של K_2 מעל K . היחסים הם:



כעת נסמן

$$G = \text{Gal}(M/K)$$

$$H_1 = \text{Gal}(M/N_1)$$

$$H_2 = \text{Gal}(M/N_2)$$

$$U_1 = \text{Gal}(M/K_1)$$

$$U_2 = \text{Gal}(M/K_2)$$

והיחסים הם:

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_2 = \bigcap_{g \in U_1} U_2^g & \text{---} & U_2 & \text{---} & U_1 & \text{---} & G \\
 | & & & & | & & \\
 1 = \bigcap_{g \in G} U_2^g & \text{---} & H_1 \cap H_2 & \text{---} & H_1 = \bigcap_{g \in G} U_1^g & &
 \end{array}$$

■ נמשיך בשיעור הבא.
 ■