

אלגברה ב2

© ארזים

9 במאי 2017

1 חבורות גלואה של פולינומים

אם f פולינום פריד מעל K אזי שדה הפיצול שלו N הוא הרחבת גלואה של N . מסמנים

$$\text{Gal}(f/K) := \text{Gal}(N/K)$$

למה 1.1 בסימונים שלעיל:

1. G פועלת נאמנה על שורשי f .

2. f אי פריק אם ורק אם הפעולה של G על שורשי f טרנזיטיבית.

3. נסמן $\{O_i\}_{i=1}^r$ את מסלולי פעולת G על שורשי f . אזי $f = f_1 \cdots f_r$, כאשר $f_i \in K[x]$ אי פריקים, $\deg f_i = |O_i|$, ומתקיים

$$f_i = \prod_{\alpha \in O_i} (x - \alpha)$$

הוכחה: נכתוב

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

כאשר $a_i \in K$.

1. אם α שורש של f , אז

$$0 = f(\alpha) = \sum_{i=0}^n a_i \alpha^i$$

נפעיל $\sigma \in G$:

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma(f(\alpha)) = \sigma\left(\sum_{i=0}^n a_i \alpha^i\right) = \sum_{i=0}^n \sigma(a_i \alpha^i) = \sum_{i=0}^n a_i \sigma(\alpha^i) = \\ &= \sum_{i=0}^n a_i \sigma(\alpha)^i = f(\sigma(\alpha)) \end{aligned}$$

לכן גם $\sigma(\alpha)$ שורש. N נוצרת על ידי שורשי f , ולכן אם σ פועל טריוויאלית על השורשים, הוא פועל פרימיטבית על N ולכן $\sigma = \text{Id}$.

2. נניח $f = gh$ פירוק לא טריוויאלי. f פריד, ולכן f, g לא יכולים לחלוק גורמים - כי אז היה שורש כפול עבור f . לכן $\gcd(g, h) = 1$. נקח α שורש של g . אז אם $\sigma \in G$, גם $\sigma(\alpha)$ שורש של g . לכן α לא יכול לעבור לשורש של h . לכן הפעולה לא טרנזיטיבית.

בכיוון השני, אם f אי פריק, $\alpha, \beta \in N$ שורשים של f , ראינו בעבר שיש איבר $\sigma \in G$ המקיים $\sigma(\alpha) = \beta$ (הסיבה היא שמתקיים $K(\alpha) \cong K[x]/f \cong K(\beta)$). לכן הפעולה טרנזיטיבית.

3. נפרק את f למכפלת אי פריקים:

$$f = \prod_{i=1}^r f_i$$

ברור שלכל $i \neq j$ מתקיים $\gcd(f_i, f_j) = 1$ כמו קודם. נסמן $N_i \subseteq N$ את שדה הפיצול של f_i , ונסמן $G_i \leq G$ חבורת גלואה המתאימה. לפי הסעיף הקודם, G_i פועלת טרנזיטיבית על שורשי f_i . מצד שני, העתקת הצמצום $r_i: G \rightarrow G_i$ היא אפימורפיזם שמכבד את הפעולה על השורשים. לכן, כיוון ששורשי f_i הם מסלול של G_i , נובע שהם גם מסלול של G .

■

1.1 הדיסקרימיננטה של פולינום

הגדרה 1.2 יהי

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

פולינום ממעלה n . יהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ שורשיו:

$$f(x) = a_0 \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$$

הדיסקרימיננטה של f מוגדרת להיות:

$$\begin{aligned} \Delta(f) &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{2n-2} \prod_{i \neq j} (\alpha_i - \alpha_j) = \\ &= a_0^{2n-2} \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \end{aligned}$$

למה 1.3

$$\Delta(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{n-2} \prod_{i=1}^n f'(\alpha_i)$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) \\ f'(\alpha_j) &= a_0 \cdot \prod_{i \neq j} (\alpha_j - \alpha_i) + 0 \\ \prod_{i=1}^n f'(\alpha_j) &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^n \prod_{j=1}^n \prod_{i \neq j} (\alpha_j - \alpha_i) = \\ &= a_0^n \prod_{i \neq j} (\alpha_i - \alpha_j) \end{aligned}$$

■

דוגמא

$$\begin{aligned} \Delta(x^2 + ax + b) &= (\alpha_1 - \alpha_2)^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2 = a^2 - 4b \\ \Delta(x^n - 1) &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n n(\zeta_n^i)^{n-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n \left(\prod_{i=1}^n \zeta_n^i \right)^{n-1} = \\ &= (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} n^n (-1)^{n^2-1} \end{aligned}$$

משפט 1.4 תכונות של הסיקרימיננטה:

$$1. \Delta(f) \neq 0 \text{ אם ורק אם } f \in K[x]$$

$$2. \Delta(f) \in K$$

3. אם f פריד, $\text{char} K \neq 2$, $G = \text{Gal}(f/K)$, נזהה את G עם תת חבורה של S_n על ידי הפעולה על שורשי f . אזי $G \leq A_n$ אם ורק אם $\Delta(f) = x^2$ עבור $x \in K$ כלשהו.

הוכחה:

1. ברור - הביטוי מוגדר על ידי מכפלת הפרשי השורשים, ולכן הוא מתאפס אם ורק אם יש שני שורשים שווים.

2. אם f לא פריד, אז $\Delta(f) = 0 \in K$ וסיימנו. אם f פריד, אזי לכל $\sigma \in \text{Gal}(f/K)$ מתקיים

$$\begin{aligned}\sigma(\Delta(f)) &= \sigma \left((-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{2n-2} \prod_{i \neq j} (\alpha_i - \alpha_j) \right) = \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{2n-2} \prod_{i \neq j} (\sigma(\alpha_i) - \sigma(\alpha_j)) = \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{2n-2} \prod_{i \neq j} (\alpha_i - \alpha_j)\end{aligned}$$

ולכן $\Delta(f) \in K$ - היא מושבתת על ידי כל איברי $\text{Gal}(f/K)$.

3. נוכיח בהרצאה הבאה.

■

הערה 1.5 יש נוסחה של ממש עבור הדיסקרימיננטה לפי מקדמי הפולינום, שנראה אותה בהרצאה הבאה (נוסחת סילבסטר/נוסחת הרזולטנטה).