

אלגברה ב2

© ארזים

25 באפריל 2017

תרגיל f פריד אם ורק אם $\gcd(f, f') = 1$.

טענה 0.1 (הקשר בין פולינומים לשדות) תהי L/K הרחבה סופית.

1. $\alpha \in L$ פריד מעל K אם ורק אם $\text{irr}(\alpha, K)$ פריד (ההגדרה של איבר פריד היא שההרחבה $K(\alpha)/K$ פרידה).

2. L/K פרידה אם ורק אם כל $\alpha \in L$ הוא פריד מעל K .

3. L/K נורמלית אם ורק אם לכל $\alpha \in L$, הפולינום $\text{irr}(\alpha, K)$ מתפצל מעליה.

4. אם L/K שדה פיצול של פולינום $f \in K[x]$ אזי L/K נורמלי.

5. אם L/K שדה פיצול של פולינום פריד אזי L/K גלואה.

הוכחה: הקדמה:

אם $\sigma \in \text{Emb}_K(L, \overline{K})$, ואם $f = \text{irr}(\alpha, K)$ אזי נפעיל את σ על השוויון $f(\alpha) = 0$:

$$\sigma(f(\alpha)) = 0$$

$$f(\sigma(\alpha)) = 0$$

לכן $\sigma(\alpha)$ שורש של f . אם $\beta \in \overline{K}$ הוא שורש של f , אזי ההעתקה $\sigma : K[\alpha] \rightarrow K[\beta]$ המוגדרת על ידי

$$\sigma\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha^i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \beta^i$$

היא הומומורפיזם של חוגים. זה משרה התאמה חד־חד־ערכית ועל

$$\text{Emb}_K(K(\alpha), \overline{K}) \leftrightarrow \{\beta \mid f(\beta) = 0\}$$

בפרט:

$$[K(\alpha) : K]_S = |\{\beta \in \overline{K} \mid f(\beta) = 0\}|$$

כעת נוכיח את הטענה.

1. $\alpha \in L$ אי פריד אם ורק אם

$$[K(\alpha) : K]_s = [L : K]$$

כלומר, אם ורק אם

$$|\{\beta \mid \text{irr}(\alpha, K)(\beta) = 0\}| = \deg(\text{irr}(\alpha, K))$$

כלומר אם ורק אם אין לפולינום $\text{irr}(\alpha, K)$ שורשים כפולים, שזו הגדרת פרידות.

2. אם L/K פריד, ראינו כי כל הרחבת ביניים גם פרידה, ובפרט $K(\alpha)/K$ פריד לכל $\alpha \in L$. בכיוון השני, נניח כי כל $\alpha \in L$ פריד מעל K . L/K סופית, ולכן קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ עבורם:

$$K \subseteq K(\alpha_1) \subseteq K(\alpha_1, \alpha_2) \subseteq \dots \subseteq K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

α_i פריד מעל K , ולכן פריד מעל $K(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$ (ראינו). לכן, כל הרחבה עוקבת במגדל היא פרידה, ואז, לפי למה משעור קודם, נקבל כי L/K פרידה.

3. נניח כי L/K נורמלית. נקח $\alpha \in L$ ונראה כי כל השורשים של $f = \text{irr}(\alpha, K)$ נמצאים בתוך L . יהי $\beta \in \overline{K}$ המקיים $f(\beta) = 0$. יש $\sigma : K(\alpha) \rightarrow \overline{K}$ המקיים

$$\sigma(\alpha) = \beta$$

נרחיב אותו באופן כלשהו להעתקה

$$\sigma : L \rightarrow K$$

כיוון שההרחבה נורמלית נקבל $\sigma(L) = L$, ולכן $\beta \in \sigma(L) = L$ וסיימנו. בכיוון השני, נניח כי L/K אינו נורמלי, כלומר יש $\sigma : L \rightarrow \overline{K}$ מהקיים $\sigma(L) \not\subseteq L$. נקח $\beta \in \sigma(L) \setminus L$ ונסמן

$$\alpha = \sigma^{-1}(\beta) \in L$$

ואז $\text{irr}(\alpha, K)$ אינו מתפצל, כי $\beta = \sigma(\alpha)$ הוא שורש שלו (לפי ההקדמה בתחילת ההוכחה).

4. נניח כי L/K שדה פיצול של פולינום $f \in K[x]$, כלומר

$$f = \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$$

$$\alpha \in L$$

$$L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

יהי $\sigma : L \rightarrow \overline{K}$ עם $\sigma|_K = \text{id}$. אזי

$$\sigma(L) = \sigma(K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = K(\sigma(\alpha_1), \dots, \sigma(\alpha_n)) \subseteq L$$

כי $\sigma(\alpha_i)$ שורשים של f (שוב מההקדמה). לכן L/K אכן נורמלית.

5. נניח כעת כי L/K שדה פיצול של $f \in K[x]$ פריד. מצד אחד, L/K נורמלית לפי 4. מצד שני, L/K פריד, כי נוצר על ידי איברים פרידים. לכן L/K גלואה.

■

דוגמאות $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ גלואה. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ לא גלואה. בנוסף, $\mathbb{F}_p(\sqrt[p]{u})/\mathbb{F}_p(u)$ לא פרידה: נסמן $K = \mathbb{F}_p(u)$, שדה הפונקציות הרציונאלית במשתנה u מעל $\mathbb{F}_p$. אזי $\sqrt[p]{u} \notin \mathbb{F}_p(u)$, וכן

$$\text{irr}(\sqrt[p]{u}, K) = x^p - u$$

ברור שפולינום זה מתאפס על $\sqrt[p]{u}$, והוא אי פריק מאיזשטיין (תרגיל). נשים לב כי

$$x^p - u = (x - \sqrt[p]{u})^p$$

לכן $\mathbb{F}_p[\sqrt[p]{u}]$ לא פריד מעל $\mathbb{F}_p(u)$ (יש שורש יחיד בסגור האלגברי, כלומר שיכון יחיד, אבל מעלת ההרחבה היא $p \geq 2$). נעיר כי

$$(x^p - u)' = px^{p-1} = 0$$

$$\gcd(x^p - u, 0) = x^p - u \neq 1$$