

אלגברה ב2

© ארזים

14 במרץ 2017

התחלנו עם חצי שעה של הקדמה על ההיסטוריה של תורת המשוואות ותורת גלואה.

1 חוגים, שדות ופולינומים

1.1 חוגים

הגדרה 1.1 חוג (עם יחידה) R הוא קבוצה עם שתי פונקציות:

$$\cdot : R \times R \rightarrow R$$

$$+ : R \times R \rightarrow R$$

שנקראות כפל וחיבור (בהתאמה), שמקיימות את התכונות הבאות:

1. $(R, +)$ חבורה אבלית. בפרט קיים 0, איבר נייטרלי לחיבור.

2. $(R, \cdot)$ מונואיד אבל (הכפל אסוציאטיבי וקומוטטיבי). בפרט קיים 1, איבר נייטרלי לכפל.

3. חוקי הפילוג מתקיימים:

$$(a + b) c = ac + bc$$

בפרט, $0 \cdot a = 0$ לכל $a \in R$:

$$0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$$

$$0 = 0 \cdot a$$

הערה 1.2 $1 = 0$ אם ורק אם $R = \{0\}$.

הגדרה 1.3 תת קבוצה $S \subseteq R$ של חוג נקראת תת-חוג אם S חוג ביחס לפעולות של R , וכן $1 \in S$.

טענה 1.4 יהי R חוג, ויהי $S \subseteq R$. אזי S הוא תת חוג אם ורק אם $1 \in S$, וכן S סגור לחיבור, לכפל, ולנגדי.

■

הוכחה: תרגיל (כמו בחבורות).

הגדרה 1.5 יהיו R, S חוגים. העתקה $\varphi : R \rightarrow S$ נקראת הומומורפיזם (של חוגים) אם מתקיימים התנאים הבאים:

1.

$$\forall x, y \quad \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

2.

$$\forall x, y \quad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

3.

$$\varphi(1_R) = 1_S$$

הערה 1.6 תנאי 3 לא נובע מתנאים 1,2. כתרגיל - לנמק.

הערה 1.7

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \varphi(0 + 0) = \varphi(0) + \varphi(0) \\ 0 &= \varphi(0) \end{aligned}$$

הגדרה 1.8 הומומורפיזם חד-חד-ערכי נקרא מונומורפיזם. הומומורפיזם על נקרא אפימורפיזם. הומומורפיזם שהוא אפימורפיזם ומונומורפיזם נקרא איזומורפיזם.

הגדרה 1.9 חוג R נקרא תחום שלמות אם $1 \neq 0$ אין בו מחלקי אפס, כלומר

$$\forall a, b \in R \quad ab = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$$

תרגיל $R \neq 0$ תחום שלמות אם ורק אם קיים בו חוק צמצום, כלומר

$$\forall a \neq 0, b, c \quad ab = ac \Rightarrow b = c$$

הגדרה 1.10 יהי R חוג. תת קבוצה $I \subseteq R$ נקראת אידאל אם היא מקיימת את התנאים הבאים:

$$1. 0 \in I$$

$$2. (I, +) \leq (R, +) \text{ (ביחס לחיבור).}$$

$$3. I \text{ סגורה לכפל באיברי } R, \text{ כלומר}$$

$$\forall a \in R, b \in I \quad ab \in I$$

דוגמאות $0, R$ תמיד אידאלים.