33 אגר

3.12.08

משפט:

יהי X מ"ט. התכונות הבאות שקולות:

1. X מרחב T_2.
2. לכל $x_1, x_2 \in X$ שונים, קיימת סביבה $U(x_1)$ של x_1, המקיימת $x_2 \notin \overline{U(x_1)}$
3. עבור כל $x \in X$, החיתוך של הסגורים של כל הסביבות של x הוא $\{x\}$
4. האלכסון $\Delta := \{(x,x) \in X \times X : x \in X\}$ סגור (תת סגורה של המכפלה הקרטזית).

הוכחה:

נוכיח ש- $4 \Leftarrow 3$, $1 \Leftarrow 4$.

$4 \Leftarrow 3$

נניח שלכל $x \in X$, החיתוך של כל הסגורים של כל הסביבות של x הוא $\{x\}$.

נוכיח כי המשלים של האלכסון הוא קבוצה פתוחה.

יהי $(x,y) \in X \times X \setminus \Delta$ לכן $x \neq y$.

$y \notin \{x\}$ ולכן עפ"י 3 קיימת סביבה U של x עבורה $y \notin \bar{U}$.

אז - $(x,y) \in U \times (X \setminus \bar{U})$

המשך.

$U\times(X\setminus\bar{U})$ סביבה של הזוג (x,y) כי U סביבה של x ו- $X\setminus\bar{U}$ קב' פתוחה (משלימה של סגורה) שע"פ מה שמצאנו זה - בה"כ סביבה של y.

$U\times(X\setminus\bar{U})$ זרה ל- Δ. בה"כ המשלים של Δ קב' פתוחה.

$4 \Rightarrow 1$

תהיינה $x_1,x_2\in X$, $x_1\neq x_2$.

$(x_1,x_2)\notin\Delta$

קיימת סביבה $U\times V$ של (x_1,x_2) המוכלת במשלים של Δ.

U סביבה של x_1. V סביבה של x_2.

$U\cap V=\emptyset$ כי $U\times V$ מוכלת במשלים של Δ.

$\Leftarrow$ X מרחב T_2.

הגדרה:

נאמר כי מ"ט הוא רגולרי - T_3 אם הוא T_2 ולכל $x\in X$ ולכל קב' סגורה A שאינה מכילה את x, קיימות קבוצות פתוחות U,V המקיימות $x\in U$, $A\subset V$, $U\cap V=\emptyset$.

* לחשוב אם זה שאם היינו דורשים פה T_1 במקום T_2 זה היה בדיוק אותו דבר.

משפט:

יהי X מרחב T_2, הטענות הבאות שקולות:

1. X רגולרי.
2. לכל $x\in X$ ולכל קבוצה פתוחה U המכילה את x, קיימת קב' פתוחה V המקיימת - $x\in V\subset\bar{V}\subset U$.
3. לכל $x\in X$ ולכל קב' סגורה A שאינה מכילה את x, קיימת V פתוחה המקיימת $x\in V$ ו- $\bar{V}\cap A=\emptyset$.

הוכחה:

תרגיל.

משפט:

מכפלה קרטזית של מרחבים טופולוגיים היא רגולרית $\overset{\text{אמ"מ}}{\Longleftrightarrow}$ כל גורם הוא רגולרי.

משפט:

כל תת-מרחב של מרחב רגולרי (T_3) הוא רגולרי.

* מרחב מנה של מרחב רגולרי לא חייב להיות רגולרי. שום פעם מרחב שרפינסקי שהוא מרחב מנה של הקטע $[0,1]$. (כמו הדוגמא ל- T_2)

משפט:

אם X רגולרי ו- $A\subset X$ סגורה.
אזי מרחב המנה X/A הוא T_2. (זה המרחב שבו מכווצים את הקב' A לנק' אחת.)

הוכחה:

נסמן $p: X\to X/A$ את העתקת המנה.

יהיו $x,y\in X$ עבורן $p(x)\neq p(y)$.

לא ייתכן ש- $x,y\in A$ כי אז יש להן אותה תמונה ע"י p. לכן האפשרויות שנותרו הן: $x,y\notin A$ או אחת מהן ב- A.

- נניח ש- $x,y\notin A$. אזי ברור ש- $x\neq y$ ולכן ב- X (שהוא מרחב רגולרי) קיימות קב' פתוחות U,V כך ש-

$$x\in U\ ,\ y\in V$$

$$U\cap V=\emptyset$$ ו- (אחרי חיתוך של המקוריות עם $X\setminus A$ - נקבל)

$$U,V\subset X\setminus A$$

כעת- $p(x)\in p(U)$, $p(y)\in p(V)$

$p(U)$ ו- $p(V)$ פתוחות ב- X/A כי התמונה ההפוכה של $p^{-1}(p(V))=V$.

ו- $p(U)\cap p(V)=\emptyset$ $\Leftarrow$ הצלחנו להפריד.

זה T_2. ↓

בס"ד

<u>המשך:</u>

- האפשרות השניה, $x \notin A$, $y \in A$.

מכיוון ש-X רגולרי קיימות U,V פתוחות המקיימות:

$x \in U$, $A \subset V$ והן זרות - $U \cap V = \emptyset$.

אזי -

$p(x) \in p(U)$, $p(y) \in p(V)$ וגם $p(U)$ ו-$p(V)$ פתוחות

במנה X/A שכן כי - $p^{-1}(p(U)) = U$

$p^{-1}(p(V)) = V$

וזרות, כי U ו-V זרות.

$\Longrightarrow$ שוב הצלחנו להפריד.

$\Leftarrow$ X/A הוא T_2.

<u>הגדרה:</u>

מ"ט X נקרא <u>נורמלי - T_4</u> אם הוא T_2 ולכל שתי קב' סגורות זרות - A, B. קיימות U, V פתוחות המקיימות:

$A \subset U$, $B \subset V$ ו- $U \cap V = \emptyset$.

* ברור שכל T_4 הוא T_3. (כי הסינגלטון $\{x\}$ זה קב' סגורה).

לכן דוגמאות נגדיות של מרחבים T_4 זה יכסה דוגמאות של מרחבים T_3.

<u>משפט:</u>

כל מרחב מטרי הוא נורמלי.

<u>למה:</u>

יהי (X,d) מרחב מטרי, $A \subset X$.

נגדיר עבור כל $x \in X$ - מרחק מקב' לנקודה.

$$d(x,A) = \inf\{d(x,y) \mid y \in A\}$$

ההתאמה $x \to d(x,A)$ רציפה על X.

הוכחת הלמה

יהיו $x_0 \in X$ ו- $\varepsilon > 0$.

נוכיח כי אם - $d(x, x_0) < \varepsilon$ אזי:

$$|d(x, A) - d(x_0, A)| \leq \varepsilon$$

נניח כי $d(x, x_0) < \varepsilon$. לכל $y \in A$ מתקיים:

א"ה D.

$$d(x,y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y)$$

$$\Downarrow$$

$$d(x, A) \leq d(x,y) < \varepsilon + d(x_0, y) \qquad \forall y \in A$$

$$\Downarrow$$

$$d(x, A) \leq \varepsilon + d(x_0, A)$$

באופן דומה מוכיחים ש-

$$d(x_0, A) \leq \varepsilon + d(x, A)$$

$$\Downarrow$$

מתקבל ש-

$$|d(x, A) - d(x_0, A)| < \varepsilon$$

למה

$d(x, A) = 0 \iff x \in \bar{A}$ אמ"מ.

הוכחה:
תרגיל בית.

הוכחת המשפט: ראשית מרחב מטרי הוא T_2, יש להוכיח נורמליות.

יהיו $A, B \subset X$ סגורות, זרות.

נגדיר $f: X \to [0,1]$ באופן הבא:

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

המשך.

המכנה לא יכול להתאפס כי A ו- B זרות.

f הנ"ל רציפה (כסכום וחילוק של פונק' רציפות, מתאימה).

$f(x)=0$ אמ"מ $x \in A$

$f(x)=1$ אמ"מ $x \in B$

וגם -

$$A \subset f^{-1}\left(\left[0,\tfrac{1}{2}\right)\right) \quad , \quad B \subset f^{-1}\left(\left(\tfrac{1}{2},1\right]\right)$$

ואלו הן קב' פתוחות (כמקורות הפוכים ע"י פונק' רציפה של קב' פתוחות בטופולוגיה היחסית של $[0,1]$.

ואלו הן גם זרות.

$\Leftarrow$ הפרדנו את A ו- B ע"י קב' פתוחות זרות שמכילות אותם

■

ראינו בתרגילים ש- $\mathbb{R}_u$ שזה $\mathbb{R}$ עם טופולוגיה שבסיסה הוא קטעים מהצורה $(a,b]$.

ראינו ש- $\mathbb{R}_u$ יותר עדינה מאשר $\mathbb{R}$ בטופולוגיה האוקלידית.

טענה:

$\mathbb{R}_u$ נורמלי.

הוכחה:

יהיו $A,B \subset \mathbb{R}_u$ סגורות, זרות.

ראשית ברור ש- $\mathbb{R}_u$ הוא T_2 כי $\mathbb{R}$ אוקלידי הוא T_2 וזו יותר עדינה מהאוקלידית אז ברור. (כל שהטופולוגיה יותר עדינה, אפשר להפריד יותר בקלות).

יהי $a \in A$, נגדיר -

$$b_a := \begin{cases} -\infty & (-\infty,a] \cap B = \emptyset \\ \sup\{b \in B : b < a\} & \text{אחרת} \end{cases}$$

<u>המשך:</u>

$b_a < a$ מכיוון שה- sup הזה שייך ל-B (B סגורה ב-$\mathbb{R}_u$).

והרי $a \in A$ ואין צורך... (רק לא שווה, דרוש ש- $b_a \le a$).

חשוב לשים לב ש-

$$(b_a, a] \cap B = \emptyset.$$

נתבונן ב-

$$A \subset U := \bigcup_{a \in A} (b_a, a]$$

$\downarrow$

זוהי קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}_u$.

והיא זרה ל- B.

נעשה בדיוק אותו דבר ונגדיר את a_b ונקבל קטעים

$(a_b, b]$ ו- $b \in B$.

ונקבל -

$$B \subset V := \bigcup_{b \in B} (a_b, b]$$

$\downarrow$

גם קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}_u$

זרה ל- A.

ונניח - $U \cap V = \emptyset$, אחרת אז קיים $a_0 \in A$ ו- $b_0 \in B$! q ש-

$$(a_{b_0}, b_0] \cap (b_{a_0}, a_0] \neq \emptyset$$

דרוש שלא ייתכן ש- $a_0 = b_0$. האפשרויות הם -

א. $a_0 < b_0$ ואז אם נחליף אז $a_{b_0} < a_0$

בסתירה לכך שאין שם q של A.

ב. $b_0 < a_0$ ובאותו אופן - שוב סתירה.

$\Leftarrow U \cap V = \emptyset \Leftarrow \mathbb{R}_u$ נורמלי.

<u>טענה:</u>

$\mathbb{R}_u \times \mathbb{R}_u$ אינו נורמלי. (בשונה מ- $\mathbb{R}_u$ שהוא נורמלי)

<u>הוכחה:</u>

תרגיל בית.

- פה רואים דוגמא נגדית לכך שמכפלה קרטזית של מרחבים נורמליים היא נורמלית.

ואז מקבלים דוגמא למרחב רגולרי שאינו נורמלי. כי מכפלה של 2 רגולריים היא רגולרית.

$\Leftarrow$ $\mathbb{R}_u \times \mathbb{R}_u$ רגולרי שאינו נורמלי.

- אם יש לנו (X_1, d_1) ו- (X_2, d_2) מרחבים מטריים אזי עבור $X_1 \times X_2$ הטופולוגיה של המכפלה באה גם היא ממטריקה. (למשל להגדיר: $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d(x_1,y_2) + d(x_2,y_1)$)

ולכן זה אומר שהטופולוגיה של $\mathbb{R}_u$ אינה באה ממטריקה (כי המכפלה הקרטזית לא נורמלית).

$\Leftarrow$ אומרים ש- $\mathbb{R}_u$ <u>אינו מטריזבילי.</u>

יהי X מרחב רגולרי שאינו נורמלי.

קיימות שתי קבוצות סגורות, זרות, A, B כך שלכל U, V פתוחות, $A \subset U$, $B \subset V$ מתקיים ש- $U \cap V \neq \emptyset$.

<u>טענה:</u>

X/A הוא T_2 אך אינו רגולרי (T_3)

<u>הוכחה:</u>

יודעים ש- X/A T_2 כי X רגולרי ו- A סגורה, את הוכחנו.

נראה שאינו רגולרי.

נסמן: $p: X \longrightarrow X/A$ ההעתקה המנה.

B זרה ל- A ולכן $B = p^{-1}(p(B))$ $\Leftarrow$ $p(B)$ סגורה ב- X/A

בס״ד

<u>המשך.</u>

יהי $x \in A$ (או A) דווקא כי יש את התכונה שאי אפשר להפריד בין A ל- B.

(טען שאי אפשר להפריד בין $p(x)$ ובין $p(B)$ ע״י קבוצות פתוחות, זרות.

נניח בשלילה שאפשר.

אז קיימות W_1, W_2 פתוחות, זרות ב- Y/A המקיימות

$$p(x) \in W_1 \quad , \quad p(B) \subset W_2$$

אפשר בנוסף לומר ש-

$p(A) \subset W_1$ ← זה בדיוק ע״י את השווה ל- $p(x)$.

$$A \subset p^{-1}(W_1) \quad ! \quad B \subset p^{-1}(W_2)$$

פתוחות (כתמונה הפוכה של פתוחות)

וזרות.

⇐ קיבלנו שב- X ניתן להפריד.

אך זה סתירה!

⇐ X/A T_2 אך לא T_3.

<u>טענה:</u>

יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ משפחה של מ״ט.

אם $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ מרחב נורמלי אזי X_α נורמלי.

<u>הוכחה</u>

נניח $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ מרחב T_4 - ויהי $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$

יהי $\alpha_0 \in A$ אינדקס.

↓

המשך

נראה חיזוק של המכפלה באופן הבא-

$$S(x,\alpha_0):=\{y=(y_\alpha)\in\prod X_\alpha : y_\alpha=x_\alpha,\ \alpha\neq\alpha_0\}$$

נרצה להוכיח ש-

$S(x,\alpha_0)$ ת"ק סגורה ב- $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$

הוכחה:

מכיוון שהמכפלה T_1 ידוע לנו שכל X_α הוא T_1.

נוכיח שהמשלים של $S(x,\alpha_0)$ פתוח במכפלה.

יהי $z=(z_\alpha)\in\prod_{\alpha\in A} X_\alpha\setminus S(x,\alpha_0)$.

לכן קיימת קואורדינטה $\alpha_1\neq\alpha_0$ שבה-

$z_{\alpha_1}\neq x_{\alpha_1}$ (ב- X_{α_1})

X_{α_1} הוא T_1 ולכן קיימת סביבה U_{α_1} פתוחה ב- X_{α_1}

כך ש $z_{\alpha_1}\in U_{\alpha_1}$ ו-! $x_{\alpha_1}\notin U_{\alpha_1}$.

נתבונן ב- $U:=\prod_{\alpha\in A} U_\alpha$ כאשר כל $U_\alpha=X_\alpha$ אם $\alpha\neq\alpha_1$

U הנו פתוחה במכפלה ו- $\emptyset=U\cap S(x,\alpha_0)$

כמובן ש- $z\in U$ ולכן נובע שהמשלים של $S(x,\alpha_0)$ פתוח.

למה

יהי X מרחב נורמלי. $A\subset X$ סגורה.

אזי A מרחב נורמלי בטופולוגיה היחסית.

הוכחה:

תרגיל ד - חשוב להוכיח!!

הוכחת המשפט:

אם המכפלה נורמלית - היא בפרט T_2 ואז כל גורם הוא T_2.

ניקח $\alpha_0 \in A$.

נרצה להוכיח ש- X_{α_0} נורמלי.

יהי $x \in \prod X_\alpha$ ונתבונן ב- $S(x, \alpha_0)$ - שהוא קב' סגורה

ומהלמה הקודמת - זהו מרחב נורמלי בטופולוגיה היחסית

הוכחנו כבר ש-

$$S(x, \alpha_0) \cong X_{\alpha_0}$$

$$\Downarrow$$

X_{α_0} נורמלי.

■

* כל דבר עובר עם הומיאומורפיזם. (זה איזומורפיזם של טופולוגיה)

לשים לב:

עבור כל של רגולרי, T_1 וכו' - לא צריך למה להניח בלי A.

רק על נורמלי צריך ש A סגורה. (כי נורמליות זה לא תכונה תורשתית)

* לקרוא בספר של Kelley בעמ' 132 ובספר של Dugundji בעמ' 145	} דוגמאות

משפט:

יהי X מרחב T_2. הטענות הבאות שקולות:

1. X נורמלי.
2. לכל A סגורה, U פתוחה, המקיימות $A \subseteq U$, קיימת V פתוחה המקיימת - $A \subset V \subset \bar{V} \subset U$,
3. לכל 2 קב' סגורות, זרות - A, B. קיימות U ו- V פתוחות המקיימות $A \subset U$, $B \subset V$,

$$\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$$

הוכחה: תרגיל בית.

בס״ד

משפט:

תמונה רציפה וסגורה של מרחב נורמלי היא נורמלית.

בתמונה על פונק׳ רציפה וסגורה.

מסקנה:

יהי X נורמלי ו- $A \subset X$ סגורה. אזי X/A נורמלי.

הוכחה:

ידוע ש- X/A T_2.

נתבונן בהעתקת המנה: $p: X \to X/A$

די להוכיח ש- p סגורה ואז מהמשפט זה ינבע.

תהי $B \subset X$ סגורה

א. אם $B \cap A = \emptyset$ אזי $p^{-1}(p(B)) = B$ ולכן $p(B)$ סגורה.

ב. אם $B \cap A \neq \emptyset$ אזי $p^{-1}(p(B)) = A \cap B$ ולכן גם במקרה זה $p(B)$ סגורה.

$\Leftarrow$ p סגורה.

4.12.08

הוכחת המשפט:

תהי $f: X \to Y$ על Y.

ראשית, Y הוא T_1.

כי ניקח $y \in Y$, אז קיימת $x \in X$ עבורה $f(x) = y$

אזי: $f(\{x\}) = f(\{y\})$

$\{x\}$ סגורה ב-X ולכן (מהיות f פונק׳ סגורה).

$\{y\}$ סגורה ב- Y.

ולכן Y הוא T_1. (מקריטריון שקול).

כעת, יהיו $A, B \subset Y$ סגורות, זרות.

$f^{-1}(A)$ ו- $f^{-1}(B)$ סגורות וזרות ב- X (f רציפה).

קיימות V, U פתוחות, $U \supset f^{-1}(A)$

$V \supset f^{-1}(B)$

כי X נורמלי.

$U \cap V = \emptyset$