בס"ד

<u>המשך</u>

אחרי t_0 המסילה עוזבת את הקטע $|$ על ציר ה-y.

נראה כי f לא רציפה ב-t_0.

נראה כי לא חשוב כמה קרובים נהיה ל-t_0 - הקואורדינטה השניה של f מקבלת את כל הערכים בין 1- ל-1.

אז ניקח $t_0 < t_1 < 1$

ונסתכל על $P_2 \circ f$ ← ההטלה על הקואורדינטה השניה של $f(t)$.

$$P_2 \circ f(\underbrace{t_0, t_1}_{\text{קטע}}) = [-1,1]$$

כאשר $P_2 \circ f(t_0) = b$ כלשהו.

וזה הרי לכל t_1 ואין δ ⇐

$P_2 \circ f$ לא רציפה ⇐ f לא רציפה.

(ההטלה רציפה)

נותר להוכיח ש-

$P_2 \circ f(t_0, t_1) = [-1,1]$.

<u>27.11.08</u>

<u>נשים לב ש-</u>

$P_1 \circ f(t_0) = 0$ *

$P_1 \circ f(t_1) = a > 0$. לכן לפי משפט ערך הביניים עבור n כלשהו

קיימים $t_0 < u_n < t_1$ עבורם:

$$P_1(f(u_n)) = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$f(u_n) = \left(\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}, (-1)^n\right)$$

זה ה-y המתאים.

דף ב

המשך:

נאמר - $P_2(f(u_n)) = (-1)^n$.

נאמר, בין t_0 ל- t_1, הפונק' הרציפה $P_2\circ f$ מקבלת את הערכים
-1 ו- 1 ⇐ מקבלת את כל הערכים בין -1 ל- 1 אינסוף פעמים.

$$\Downarrow$$

$$P_2\circ f((t_0,t_1)) = [-1,1]$$

⇐ f לא יכולה להיות רציפה ב- t_0.

(כי בקטע קטן סביב t_0 התמונה של הפונק' צריכה להיות קטנה
והיא לא).

* דוגמאות כאלה ואחרות נמצאות בספר -

Counterexamples in Topology.

טענה:

תמונה רציפה של מרחב קש"מ (קשיר מסילתית) הינה קש"מ.

טענה:

איחוד של משפחה של תת"מ של מ"ט, שכל אחת מהן קשירה מסילתית, אשר
חיתוכה אינו ריק, הוא קשיר מסילתית.

* (לוקחים נק' בחיתוך של המשפחה ואז לאיחוד אפשר דרכה לחבר בין כל
2 נק').

הגדרה:

X מ"ט. $x\in X$. המרכיב הקשיר מסילתית של $x\in X$ הוא איחוד של כל
תת הקבוצות הקשירות מסילתית המכילות את x.

* מרכיב קשיר מסילתית יהיה קשיר מסילתית לפי הטענה.
זוהי התת"ק הקשירה מסילתית הגדולה ביותר שמכילה את $x\in X$.

טענה:

שני מרכיבים קשירים מסילתית שונים, הם זרים.

קריטריון לקשירות מסילתית

מרחב טופולוגי X קשיר מסילתית $\Longleftrightarrow$ (אמ"מ) הוא קשיר ולכל $\bar{q}$ בו יש סביבה קשירה מסילתית.

הוכחה:

$\Longleftarrow$ ברור.

$\Longrightarrow$ נניח כי X - התכונות הנ"ל.

יהי K מרכיב קשיר מסילתית (של $\bar{q}$ כלשהו) ב-X.

נראה ש- K הנ"ל הוא קב' פתוחה.

אם $x\in K$ אז עפ"י הנתון יש ל-x סביבה קשירה מסילתית U.

מכיוון ש- K מרכיב קשיר מסילתית, $x\in U\subset K$

$\Longleftarrow$ לכל $\bar{q}$ ב-K יש גם סביבה שמוכלת כולה ב-K $\Leftarrow$ K פתוחה.

לכן למרחב שלנו כל מרכיב קשיר מסילתית הוא קב' פתוחה.

K ואיחוד יתר המרכיבים הקש"מ - שניהן קבוצות פתוחות וזרות - (כל מרכיב קשיר זר לכל מרכיב קשיר אחר).

אבל המרחב שלנו קשיר - חובה ש"איחוד יתר המרכיבים" יהיה ריק.

$\Longleftarrow$ $X=K$

! - X קשיר מסילתית.

מסקנה:

ת"ק פתוחה של $\mathbb{R}^n$ (כנ"ל של $\mathbb{C}^n$ כאשר וכו') קשירה מסילתית $\Longleftrightarrow$ (אמ"מ) היא קשירה.

הוכחה:

$\Longleftarrow$ נכון תמיד.

$\Longrightarrow$ אם $G\subset\mathbb{R}^n$ פתוחה וקשירה, ניעזר עפ"י הקריטריון לראות שלכל $\bar{q}$ ב-G יש סביבה קשירה מסילתית.

<u>המשך.</u>

לכל $x\in G$ קיים כדור פתוח $B(x,r)$ המקיים -

$x\in B(x,r)\subset G$ (מהפתיחות)

והכדורים הם קל קשירים מסילתית.

כדרוש.

G קשירה מסילתית.

<u>תכונות הפרדה</u>

<u>הגדרה:</u>

נאמר כי מ"ט X <u>הוא T_0</u> (או - <u>יש לו את התכונה T_0</u>) אם לכל -

$x_1,x_2\in X$, $x_1\neq x_2$, לאחת מהן לפחות יש סביבה שאינה מכילה את השניה.

* למשל למרחב הטריוויאלי עם יותר מנק' אחת - הוא לא T_0 כי הסביבה היחידה האפשרית זה המרחב כלו, ואז זה לא נכון.

* מרחב שרפינסקי הוא T_0. $X=\{0,1\}$

$$T=\{\emptyset,\{0\},\{0,1\}\}$$

ויש ל-0 סביבה שאינה מכילה את 1.

<u>הגדרה:</u>

מ"ט X <u>הוא T_1</u> אם לכל $x_1,x_2\in X$, $x_1\neq x_2$, יש ל-x_1 סביבה שאינה מכילה את x_2 ולהיפך.

* במרחב T_1 , לכל $x\in X$, $\{x\}$ קל סגירה.

<u>הוכחה:</u>

נראה כי המשלים קל פתוחה.

תהי $y\in X\setminus\{x\}$, יש סביבה U של y המוכלת ב- $X\setminus\{x\}$

(כי לא מכילה את x) ולכן $X\setminus\{x\}$ פתוחה.

* גם ההפך נכון. אם במ"ט G $\{x\}$ סגירה, אז המרחב הוא T_1.

• באותו אופן, כל תת סופית של המרחב היא סגורה, כאיחוד סופי של סגורות.

– ברור שכל T_1 הוא T_0 (המסקנה ישירה מההגדרה). אך יש דוגמה שהם T_0 ואינם T_1 - לדוגמא המרחב של שרפינסקי - ל-1 אין סביבה שלא מכילה את 0.

<u>הגדרה:</u>

מ"ט X הוא T_2 (Hausdorff) אם לכל $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$
יש סביבות U_j של x_j בהתאמה כך ש-
$U_1 \cap U_2 = \emptyset$. (הסביבות זרות).

– ברור שכל מרחב T_2 הוא T_1.

<u>דוגמא:</u> כל מרחב מטרי הוא מרחב T_2.

כי אם $x_1 \neq x_2$ אז $a = d(x_1, x_2) > 0$

אז ניקח $B(x_1, \frac{a}{2})$ ו- $B(x_2, \frac{a}{2})$

ושתי הסביבות האלה בהכרח זרות,
חיתוכן ריק.

* יש מרחבים שהם T_1 ואינם T_2. <u>לדוגמא:</u>

תהי X קב' אינסופית.

נגדיר עליה טופולוגיה באופן הבא:

τ - משפחת כל המשלימים של תתי הקבוצות הסופיות של X, ו- $\emptyset$.

$$\tau = \{A \subseteq X \mid X \setminus A \text{ סופית}\} \cup \{\emptyset\}$$

(X, τ) הוא T_1 ואינו T_2.

הוא T_1 כי בטופולוגיה זו - $\{x\}$ היא קבוצה סגורה.

המרחב אינו T_2 שהרי כל 2 קבוצות פתוחות לא ריקות, נחתכות וחיתוכן לא ריק.

<u>הערה:</u> (הוכחה - תרגיל בית)

1. ת"מ של מרחב T_2, גם הוא T_2.

בס"ד

המשך.

2. $\prod X_\alpha$ הוא T_2 אמ"מ כל X_α הוא T_2. (גם למכפלה אינסופית)

* דברים אלה נכונים גם עבור T_0 ועבור T_1.

ראינו כי מרחב שרפינסקי הוא מרחב מנה של $[0,1]$
וטופולוגית המנה היא של מרחב שרפינסקי.
$[0,1]$ הוא T_2 ואילו מרחב שרפינסקי הוא רק T_0.
$\Leftarrow$ דברים כאלה לא עוברים ע"י העתק מנה.

* ברור שתכונות T_0, T_1, T_2 אינווריאנטיות עבור הומיאומורפיזם.

סוף חודש
נובמבר