* הקשירות מאפשרת להוכיח שקטע $[a,b]$ לא הומיאומורפי לאף קטע $[c,d)$.

מכיוון שבסגור יש 2 נק' שבלעדיהן התמונה שלהם מוציאים אותם נשארים עם קטע קשיר.

לעומת זאת בקטע הפתוח זה לא נכון.

וכו'.

$(c,d) \not\cong [a,b]$.

* ברגע שיש תכונה שאפשר לבטא דרך הטופולוגיה היא נשמרת ע"י הומיאומורפיזם.

26.11.08

הגדרה:

יהי X מ"ט. $x \in X$.

נסמן ב- $C(x)$ - איחוד כל תתי הקבוצות הקשירות המכילות את הנק' x.

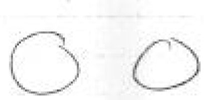
(זה לא ריק כי למשל $\{x\}$ נמצא שם).

$C(x)$ קשירה. (האיחוד של קב' קשירות שחיתוכן לא ריק).

$C(x)$ נקראת המרכיב הקשיר של x.

* במרחב הדיסקרטי מרכיב קשיר של כל נק' הוא רק $\{x\}$ - הנק'.
* גם ב- $\mathbb{Q}$ - המרכיב הקשיר של כל $q \in \mathbb{Q}$ הוא $\{q\}$.

(כי קב' קשירה בישר היא קטע).

* אם X מרחב קשיר אז לכל $x \in X$, $C(x) = X$.
* אם יש לנו 2 מעגלים  המרכיב הקשיר של כל נק' באחד המעגלים זה המעגל שלה.

* יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ מרחבים טופולוגיים ו- $x_\alpha \in X_\alpha$.

$$x = (x_\alpha) \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

המשך

אזי $$C(x) = \prod_{\alpha \in A} C(x_\alpha).$$

(ברורה ההכלה $\supseteq$ כי זו קב' קשירה וכן באיחוד.

ההכלה $\subseteq$ כי אם יש קב' קשירה גדולה יותר x ההטלה שלה למרכיב x_α מכילה את x_α ולכן בסה"כ הם שווים).

* אמרנו שקב' Cantor הומיאומורפית ל- $\{0,1\}^{\aleph_0}$.

מרכיב קשיר, למרחב הדיסקרטי, ולכל $\bar{\varphi}$ הוא הק $\bar{\varphi}$ עצמה.

$\Longleftarrow$ בקב' Cantor המרכיב הקשיר של כל $\bar{\varphi}$ זה הק $\bar{\varphi}$ עצמה.

(אפשר לראות את זה גם ע"י ההגדרה של קב' Cantor על וזו.

זאז מכילה שאם קטע $\subseteq$ המרכיב הקשיר של כל $\bar{\varphi}$ זה הק $\bar{\varphi}$ עצמה).

הערה:

אם $x_1, x_2 \in X$ ו- $C(x_1) \neq C(x_2)$ אזי -

$$C(x_1) \cap C(x_2) = \emptyset.$$

למה זה נכון?

אם יש $y \in C(x_1) \cap C(x_2)$ אזי -

האיחוד - $C(x_1) \cup C(x_2)$ קשיר.

ולכן חייב להיות שווה -

$$C(x_1) \cup C(x_2) = C(x_1) = C(x_2)$$

- סתירה!

כלומר, יש לנו פירוק של המרחב כולו למרכיבים קשירים.

* אפשר לומר שמוגדר פה יחס שקילות, 2 איברים שקולים אם יש להם אותו מרכיב קשיר.

הערה:

לכל x , $C(x) = \overline{C(x)}$

זה כי הסגור של קב' קשירה הוא קשיר, ולכן קיבלנו קב' קשירה שמכילה את x ולכן מוכלת ברכיב הקשירות.

הגדרה:

מ"ט X נקרא קשיר מקומית אם לכל $x \in X$ ולכל סביבה U של x, קיימת סביבה קשירה V של x המוכלת ב-U.

(ה-$\{x\}$ לא נקרא סביבה כי סביבה צריכה להכיל קב' פתוחה.)

דוגמאות:

* $\mathbb{R}^n$ מרחב קשיר מקומית, כי כל כדור הוא קשיר ובתוך כל סביבה, עפ"י הגדרה, יש כדור.

* כל קטע של הישר - קשיר מקומית - כי בתוך כל סביבה של כל נקודה אפשר להכניס קטע קטן יותר.

* כל תת פתוחה ב-$\mathbb{R}^n$ היא קשירה מקומית (עפ"י ההגדרה של סביבה). כי אם V הפתוחה, $x \in V$! U סביבה של x אז בוודאי אפשר להכניס כדור פתוח מספיק קטן שמוכל ב-U, והוא כמובן קשיר.

* S^n קשירה מקומית אם $n \geq 1$. סביב כל נק' יש לנו כיפות קטנות כמה שרוצים.

(או - עפ"י ההטלה הסטריאוגרפית $S^{n-1} \setminus \{n\} \cong \mathbb{R}^n$ (n הקוטב הצפוני) ומכיוון שזוהי (קשירות מקומית) תכונה טופולוגית, והיא מועברת ע"י הומיאומורפיזם ולכן S^{n-1} קשירה מקומית.)

$\Leftarrow$ נשים לב שקשירות מקומית זו תכונה שמועברת ע"י הומיאומורפיזם.

* מרחב דיסקרטי - כי פה אפשר לקחת את $\{x\}$ - כי במרחב הדיסקרטי כל קב' פתוחה - כל הקב' נקראות פתוחות.

רואים שקשירות מקומית לא גוררת קשירות.

למשל המרחב הדיסקרטי קשיר מקומית אך לא קשיר.

איחוד שני קטעים זרים על הישר קשיר מקומית אך לא קשיר.

אך, יש גם דוגמאות הפוכות - מרחבים קשירים אך לא קשירים מקומית:

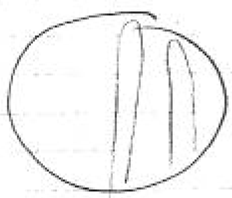
<u>לדוגמא:</u>

$$X := \left\{(0,y) : -1 \le y \le 1\right\} \cup \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) : 0 < x \le 1\right\}$$

זה בעצם הסגור של הגרף של $\sin\frac{1}{x}$ מוגז.

זהו מרחב קשיר, כבר ראינו בעבר.

אך אינו קשיר מקומית - למשל על ציר ה-y - אם לוקחים
עיגול מספיק קטן - אין דרך לבחור סביבה קשירה - כי
זה בעצם נראה כך.



בעצם כל כדור כזה זה
ואוסף של היחסים הנוזלים
האפשריים, וכן נמצא לא קשירות.

<u>משפט:</u>

התנאים הבאים שקולים לגבי מ"ט X:

1. X קשיר מקומית.
2. לכל קב' פתוחה U, ולכל $x \in U$, המרכיב הקשיר של x ב-U הוא קב' פתוחה.
3. ל-X יש בסיס של קב' קשירות.

הוכחה:

$1 \Rightarrow 2$.

נניח כי X קשיר מקומית. ותהי U קב' פתוחה, $x \in U$.

$k(x)$ - המרכיב הקשיר של x ב-U.

טענה: $k(x)$ פתוחה.

לשם כך נוכיח שלכל $y \in k(x)$ יש סביבה המוכלת ב-$k(x)$.

אכן, תהי $y \in k(x)$. U היא סביבה של y ומכיוון ש-X קשיר מקומית - קיימת סביבה קשירה V של y, המוכלת ב-U.

$$\Rightarrow V \subset k(y)$$

ואז $k(x) = k(y)$ כי הם לא זרים (y בשניהם!)

$$\Downarrow$$

מכאן מה שרצינו.

$$\Rightarrow k(x) \text{ פתוחה.}$$

$2 \Rightarrow 3$.

ניקח B בסיס (קב' פתוחות) של X, ולכל $U \in B$ ולכל $x \in U$ ניקח את $k(x)$ - זוהי קב' פתוחה ב-U וקשירה, ואז $\{k(x) | x \in U\}$ לכל U זה יהווה בסיס.

$3 \Rightarrow 1$.

מיידי.

משפט:

תהא $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ משפחה של מ"ט.

$\prod X_\alpha$ קשירה מקומית $\Leftrightarrow$ אמ"מ לכל α X_α קשיר מקומית, וכל ה-X_α פרט למס' סופי של גורמים - קשיר.

הוכחה:

$\Rightarrow$ נניח כי $\prod X_\alpha$ קשירה מקומית.

ד"סג

<u>המשך</u>

יהי $\alpha_0 \in A$ ויהי $x_{\alpha_0} \in X_{\alpha_0}$ ו- U_{α_0} סביבה של x_{α_0} ב- X_{α_0}.

לכל $\alpha \neq \alpha_0$ נגדיר $U_\alpha = X_\alpha$. ובוחרים $x_\alpha \in X_\alpha$, $\forall \alpha \neq \alpha_0$

ומכאן ש- $x = (x_\alpha) \in \prod U_\alpha$ וזוהי סביבה של המכפלה x
(כלומר ב- α שווה ממש ל- X_α כמו שצריך למכפלה קרטזית)

$$x \in Int \prod U_\alpha \subset \prod U_\alpha$$

קיימת סביבה V פתוחה וקשירה של x - מהמשפט הקודם -

$$x \in V \subset Int \prod U_\alpha .$$

ועכשיו נסתכל על ההטלה על רכיב ה- α_0.

$$x_{\alpha_0} \in p_{\alpha_0}(V) \subset U_{\alpha_0}$$

↓

זו קשירה כי תמונה ע"י פונק' רציפה
היא משמרת קשירות

ו- $p_{\alpha_0}(V)$ פתוחה כי הטלה קנונית
היא פונק' פתוחה.

⇐ מצאנו עבור x_{α_0} סביבה - $p_{\alpha_0}(V)$ שמוכלת ב- U_{α_0}
וזה לכל α.

לכן הראינו קשירות מקומית של כל גורם.

** ומה כולם חוץ ממספר סופי של גורמים - קשירים?

ניקח $y \in \prod X_\alpha$ ויש ל- y סביבה קשירה - שנסמנה ב- V

יקיים $y \in \prod V_\alpha \subset V$ כאשר כל V_α פתוחה וכו'

ומס' סופי של קב' $V_\alpha \neq X_\alpha$ (בל"ן - אחר דרוש?)

↓

המשך.

צ״ל הקבוצה של סביבה בסיסית (מושגון בסיס)

אם - $\{\underbrace{\alpha_1 , \dots , \alpha_n}_{\text{המס׳ סופי של אינדקסים}}\} \not\ni \alpha_0$

$$X_{\alpha_0} \supset P_{\alpha_0}(V) \supset P_{\alpha_0}\left(\prod V_\alpha\right) = V_{\alpha_0} = X_{\alpha_0}$$

אז יש פה שוויון

זהו -

אבל $P_\alpha(V)$ קשירה -

כי תמונה רציפה של קשירה.

$\Longrightarrow$ X_α קשיר! (חוץ ממס׳ סופי.)

$\Longrightarrow$ נניח ש X_α קשיר מקומי וכי אם $\alpha \notin \{\alpha_1 , \dots , \alpha_m\}$

אזי X_α קשיר.

תהי $x \in \prod X_\alpha$ ותהי V סביבה כלשהי של x.

(רצה להכיל בין x ו־V סביבה קשירה של x.)

ברור שאפשר להכיל בין x ו־V, סביבה בסיסית של x $\prod U_\alpha$

ש U_α פתוחה ו־$U_\alpha = X_\alpha$ אם $\alpha \notin \{\beta_1 , \dots , \beta_n\}$.

$x = (x_\alpha)$ ו־ $x_\alpha \in U_\alpha$ לכל α.

לכל α נבחר סביבה קשירה W_α של x_α , $W_\alpha \subset U_\alpha$

ואם $\alpha \notin \{\alpha_1 , \dots , \alpha_m\} \cup \{\beta_1 , \dots , \beta_n\}$ נבחר

$$W_\alpha = X_\alpha$$

ו־X_α הנה קשיר.

המשך

יהרי - $\prod W_\alpha \subset \prod U_\alpha \subset V$

ומהי סביבה קשירה של x.

כדרוש.

* קשירות מקומית היא אינווריאנט טופולוגי - נשמרת ע"י הומיאומורפיזם.
איך אינה נשמרת ע"י העתקות רציפות
תמונה רציפה של מרחב קשיר מקומית לא חייבת להיות קשירה מקומית.

לדוגמא:

נתבונן ב- $\mathbb{Q}$ עם הטופולוגיה הדיסקרטית T_d
ונסתכל על פונק' הזהות ממרחב זה, ל- $\mathbb{Q}$ עם הטופולוגיה האוקלידית שירשו הרציונליים מהישר.

$(\mathbb{Q}, T_d)$ קשיר מקומית, כי זו הטופ' הדיסקרטית.

! - $\mathbb{Q}$ לא קשיר מקומית - לא מכיל קטעים לא מנוונים.

! ה- I_d רציפה. (כל פונק' המוגדרת על מרחב דיסקרטי היא רציפה, כי תמונה הפוכה של U צריך היא קב' פתוחה כי כל קב' זה היא פתוחה)

הגדרה:
X מ"ט. רציפה $f:[0,1] \longrightarrow X$ נקראת מסילה ב- X
המתחילה מ- $f(0)$ ונגמרת ב- $f(1)$.

הגדרה:
X מ"ט נקרא קשיר מסילתית אם לכל $x_1, x_2 \in X$ קיימת מסילה
$f:[0,1] \longrightarrow X$.

המשך

המקשרת בין x_1 ו- x_2.

* אם $n \geq 2$, $A \subset \mathbb{R}^n$ בת מנייה אזי $\mathbb{R}^n \setminus A$ קשירה מסילתית.
(כמו ההוכחה שנתנו לכך ש- $\mathbb{R}^n \setminus A$ קשירה).

* מרחב דיסקרטי המכיל יותר מנק' 1 אינו קשיר מסילתית.

* המרחב הטריוויאלי (הפתוחות היחידות הן $\emptyset$ ו- X) הוא דוגמה קשיר מסילתית, כל פונק' למרחב זה היא רציפה.

משפט:

מ"ט X קשיר מסילתית $\Longleftrightarrow$ קיימת נק' x_0 בעלת התכונה -
לכל $x \in X$ יש מסילה מ- x_0 ל- X.

הוכחה:

$\Leftarrow$ ברור.

$\Rightarrow$ יהיו $x_1, x_2 \in X$.

קיימות מסילות f_j, $j=1,2$ מ- x_0 ל- x_j.

נבנה מסילה מ- x_1 ל- x_2.

$$f(t) = \begin{cases} f_1(1-2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f_2(2t-1) & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

זוהי פונק' רציפה מ- $[0,1]$ ל- X, המקשרת
בין x_1 ו- x_2.

הרציפות
(משאלה 4 בתרגיל 2).

משפט:

מרחב קשיר מסילתית הוא קשיר.

לא להיפך!

מרחב יכול להיות קשיר מבלי להיות קשיר מסילתית.

דוגמא:

$$X = \{(0,y) : -1 \le y \le 1\} \cup \{(x, \sin\tfrac{1}{x}) : 0 < x \le 1\}$$

המרחב הזה קשיר, כפי שכבר הראינו.

אבל אין שום מסילה במרחב זה המקשרת בין הראשית

ובין הנק'
$$\left(\tfrac{1}{\pi}, \sin\pi\right) = \left(\tfrac{1}{\pi}, 0\right).$$

* זה דורש <u>הוכחה</u>:

נניח בשלילה כי f מסילה כזו.

$$f: [0,1] \longrightarrow X \quad \text{רציפה.}$$

$$f(0) = (0,0)\ ,\ f(1) = \left(\tfrac{1}{\pi}, 0\right)$$

נתבונן בקבוצה -

$$[0,1] \supset F = f^{-1}\left(\{0,y \mid -1 \le y \le 1\}\right).$$

זוהי ת"ק סגורה של X ולכן F סגורה.

F לא ריקה כי $0 \in F$

$1 \notin F$ כי $f(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$

נסמן -

$t_0 = \sup F$ - הוא שייך ל-F

כי F סגורה.

$$0 \le t_0 < 1$$

בס״ד

<u>המשך</u>

אחרי t_0 המסילה עוזבת את הקטע | את ציר ה-y.

נראה כי f לא רציפה ב-t_0.

נראה כי לא משנה כמה קרובים נהיה ל-t_0 - הקואורדינטה השניה של f מקבלת את הערכים בין 1- ל-1.

אז ניקח $t_0 < t_1 < 1$

ונסתכל על $P_2 \circ f$ ← ההטלה על הקואורדינטה השניה של $f(t)$.

$$P_2 \circ f(\underbrace{t_0, t_1}_{\text{קטע}}) = [-1, 1]$$

כאשר $P_2 \circ f(t_0) = b$ b כלשהו.

וזה הרי לכל t_1 ואין רציפות $\Leftarrow$

$P_2 \circ f$ לא רציפה $\Leftarrow$ f לא רציפה.

(ההטלה רציפה)

נותר להוכיח ש-

$P_2 \circ f(t_0, t_1) = [-1, 1]$.

<u>27.11.08</u>

<u>נשים לב ש-</u>

$P_1 \circ f(t_0) = 0$ *

$P_1 \circ f(t_1) = a > 0$ לכן לפי משפט ערך הביניים עבור n כלשהו

קיימים $t_0 < u_n < t_1$ עבורם:

$$P_1(f(u_n)) = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$f(u_n) = \left(\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}, (-1)^n\right)$$

זה ה-y המתאים.