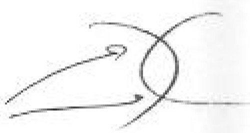
הערה:

חיתוך של 2 קב' קשירות לא חייב להיות קשיר.

למשל -



החיתוך זה 2 הנק' וזה מן הסתם לא קשיר.

20.11.08

* אם X מ"ט, $\{A_i\}_{i\in I}$ משפחה של תת"ק קשירות כך שמתקיים ש-

$A_i\cap A_j\neq\emptyset$ לכל $j,i\in I$

אז- $\bigcup_{i\in I}A_i$ קשירה.

הוכחה:

בוחרים $i_0\in I$, לכל $i\in I$ ונסמן-

$B_i=A_{i_0}\cup A_i$ קשירה לכל i

אז $\bigcup B_i=\bigcup A_i$

ואז -

$\emptyset\neq A_{i_0}\subset\bigcap B_i$

ולכן זה דסבר והאיחוד קשיר

משפט:

יהי X מ"ט, $A\subset X$ קשירה.

אם $A\subseteq B\subseteq\bar{A}$ אז B קשירה.

(בפרט- $\bar{A}$ קשירה).

הוכחה:

אחרי הדוגמא.

דוגמא:

ניקח - $A=\{(x,\sin\frac{1}{x}),\ 0<x\leq 1\}$ זה גרף של פונק'

המשך:

A קשירה כי $f: x \to (x, \sin\frac{1}{x})$ רציפה מ- $(0,1]$ ל- $\mathbb{R}^2$

A הוא בעצם התמונה של הפונק' הנ"ל, והקטע קשר, לכן A גם-היא קשירה.

מהו הסגור של A הנ"ל?

$$\bar{A} = A \cup \{(0,y) \mid -1 \le y \le 1\}$$

אז מהמשפט הקודם $\bar{A}$ הנ"ל קשירה.

זוהי דוגמא חשובה, משתמשים בה הרבה. נקראת - גרף הסינוס של הטופולוגיה.

הוכחה:

נניח בשלילה ש- B אינה קשירה. אז אפשר לפרק את B לשני קבוצות פתוחות יחסית, לא ריקות וזרות.

לכן קיימות θ_1, θ_2 ב- X, פתוחות, המקיימות -

עושים חיתוך כי זה הטופולוגיה היחסית

$$B = (B \cap \theta_1) \cup (B \cap \theta_2)$$

$B \cap \theta_1, B \cap \theta_2 \neq \emptyset$ לא ריקות, $B \cap \theta_1 \cap \theta_2 = (B \cap \theta_1) \cap (B \cap \theta_2) = \emptyset$ זרות.

יהי $x_1 \in B \cap \theta_1$ ו- $x_2 \in B \cap \theta_2$

אז x_1 נק' סגור של A

$$x_1 \in \theta_1 \cap \bar{A}$$

$$\Downarrow$$

$\theta_1 \cap A \neq \emptyset$. סביבה מכילה נק' מ-A. כי הגדרת נק' סגור

באותו אופן -

$$\theta_2 \cap A \neq \emptyset$$

$$\downarrow$$

המשך

אזי -

$$A=(A\cap\theta_1)\cup(A\cap\theta_2)$$

והרי אלו פתוחות יחסית ל- A.

הן זרות כי -

$$(A\cap\theta_1)\cap(A\cap\theta_2)\subset(B\cap\theta_1\cap\theta_2)=\emptyset$$

והן כמובן לא ריקות

$$\Downarrow$$

A אינה קשירה סתירה!

משפט:

יהי $\{X_\alpha\}_\alpha$ משפחה של מ"ט.

$\prod X_\alpha$ קשירה אמ"מ כל X_α קשיר.

הוכחה:

$\Leftarrow$ נניח כי $\prod X_\alpha$ קשירה. נפעיל את ההטלה הקנונית על הגורם α_0 $X_{\alpha_0}=P_{\alpha_0}(\prod X_\alpha)$.

כל ההטלות הן פונקציות רציפות $\Leftarrow$ כל X_{α_0} קשיר, לכל $\alpha_0\in A$.

$\Leftarrow$ כל הגורמים קשירים.

$\Rightarrow$ נניח כי כל X_α קשיר.

נוכיח למה

$\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ משפחה של מ"ט. יהי $\alpha_0\in A$.

נתונות $x_\alpha\in X_\alpha$ לכל $\alpha\neq\alpha_0$. נתבונן ב:

$$C:=\{y\mid(y_\alpha)\in\prod X_\alpha : y_\alpha=x_\alpha\ \forall\alpha\neq\alpha_0\}$$

אזי C (כתת מ"ט של המכפלה) הומיאומורפי ל- X_{α_0}.

הוכחת הלמה

נגדיר - $f: X_{\alpha_0} \to C$

יהי $x_{\alpha_0} \in X_{\alpha_0}$, אזי $f(x_{\alpha_0}) \in C$

כך ש- $(f(x_{\alpha_0}))_{\alpha_0} = x_{\alpha_0}$.

קל לבדוק שזוהי פונק' רציפה, חח"ע ועל C.
הפונק' ההפוכה ל-f, מ-C ל-X_{α_0} זה בדיוק ההטלה על X_{α_0} -
הצמצום של ההטלה מ-$\prod X_\alpha$ ל-C.
ההטלה כידוע רציפה $\Leftarrow$ יש לנו הומאומורפיזם.

נחזור להוכחת המשפט:

נניח בשלילה כי $\prod X_\alpha$ אינה קשירה. אזי -

$$\prod X_\alpha = V_1 \cup V_2$$

כך ש- V_1, V_2 פתוחות,

$V_1 \neq \emptyset \neq V_2$ לא ריקות

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$ זרות.

ניקח שהן פתוחות - הן מכילות איבר של הבסיס.

$j=1,2$ $\prod_{\alpha \in A} U_\alpha^j \subset V_j$ כש U_α^j פתוחה ב-X_α, לא ריקה
ו- $U_\alpha^j = X_\alpha$ פרט למספר סופי של α-ים.

וזה גם ב-$j=1$ וגם ב-$j=2$

$\Downarrow$

$U_\alpha^1 = X_\alpha = U_\alpha^2$ לכל α, $\alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$

האינדקסים גם ל-1 וגם ל-2.

בוחרים $x_j \in \prod_\alpha U_\alpha^j$ $j=1,2$

המשך.

כך ש- $(x_1)_\alpha = (x_2)_\alpha$ לכל $\alpha \notin \{\alpha_1 \dots \alpha_n\}$.

(אפשר לעשות זאת כי $X_\alpha = U_\alpha^1 \cup U_\alpha^2$ במקרה זה).

אז $x_1 \in V_1$ ו- $x_2 \in V_2$.

מחליפים בזה אחרי בזה את הקואורדינטות של x_1 לאלו של x_2.

(זה רק מס' סופי של צעדים. הם שונים רק במס' סופי של קואורדינטות).

והרי התחלנו בנק' ב- V_1 וסיימנו בנק' ב- V_2.

$\exists$ 2 נק' עוקבות בסדרה הזו שונות רק בקואורדינטה אחת.

וכולם נמצאות או ב- V_1 או ב- V_2 (כי $X = V_1 \cup V_2$)

$\Leftarrow$ באיזשהו מקום בסדרה יש 2 נק' שונות כך שאחת ב- V_1 והשניה ב- V_2. הן שונות רק בקואו' 1.

נסמן ב- z_1 ו- z_2.

$$(z_1)_{\alpha_0} \neq (z_2)_{\alpha_0}$$

$$(z_1)_\alpha = (z_2)_\alpha \quad \forall \alpha \neq \alpha_0$$

נתבונן בקבוצה-

$$C := \{ z = (z_\alpha) : z_\alpha = (z_1)_\alpha \ \forall \alpha \neq \alpha_0 \}$$

לפי הלמה-

$C \cong X_{\alpha_0}$ ובפרט C קשירה.

הנק' $z_1 \in C$ וגם $z_1 \in V_1$

$$z_1 \in C \cap V_1$$

הנק' $z_2 \in C$ וגם $z_2 \in V_2$

$$z_2 \in C \cap V_2$$

$\downarrow$

המשך

כאמור, ניתן לכתוב:

$$C = (C\cap V_1)\cup(C\cap V_2)$$

והן זרות, לא ריקות (יש בהן z_1 ו- z_2)

והן פתוחות יחסית ל- C כי V_1 ו- V_2 פתוחות

$\Downarrow$

בסתירה לקשירות של C.

* מכאן מקבלים הוכחה נוספת לכך ש- $\mathbb{R}^n$ קשיר (כי כל $\mathbb{R}$ קשיר ועושים מכפלה).

ההוכחה המוכרת יותר היא מזה ש- $\mathbb{R}^n$ קמורה - ואז נובע ש- $\mathbb{R}^n$ קשירה.

משפט:

יהי $n\geq 2$. תהי $A\subset\mathbb{R}^n$ תת־ק׳ בת מנייה (או סופית).

אזי - $\mathbb{R}^n\setminus A$ מ׳ קשירה.

(* - זה ממש לא נכון ב- $\mathbb{R}$! מספיק להוציא נק׳ 1 והמשלים כבר לא קשיר).

הוכחה:

תהי $a\in\mathbb{R}^n\setminus A$. לכל $x\in\mathbb{R}^n\setminus A$ קיימת קב׳ קשירה

$$C_x\in\mathbb{R}^n\setminus A$$

המכילה את a ואת x.

זה מספיק כי מזה נובע כמובן שהאיחוד של ה- C_x כולן שווה

ל- $\mathbb{R}^n\setminus A$:

והחיתוך שלהם לא ריק - מכיל לפחות את a.

ומזה נובע ש- $\mathbb{R}^n\setminus A$ קשירה.

אז נראה איך למצוא את C_x.

$\downarrow$

<u>המשך</u>

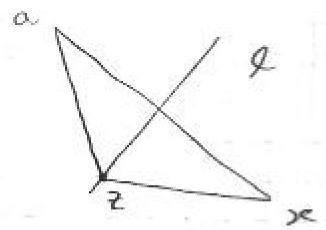
נתבונן בקטע -

$$\lambda a + (1-\lambda)x$$

המחבר בין a ל- x.

(הוא לא בהכרח ב- $\mathbb{R}^n \setminus A$?)

ונתבונן ב- l החוצה אותו -



לכל $z \in l$ נגדיר ככה:

$$l_z = [a,z] \cup [z,x] \qquad z \in l$$

קל לראות ש- $l_{z_1} \cap l_{z_2} = \{a,x\}$ אם $z_1 \neq z_2$.

ומס' הנק' z רבה - זה מס' הנק' על הישר - עוצמת הרצף. (יותר מעוצמת A).

$\Leftarrow$ קיימת z כך ש-

$l_z \subset \mathbb{R}^n \setminus A$ כולה.

l_z קשירה ומכילה גם את a וגם את x.

נגדיר -

$$C_x = l_z$$

כנדרש.

* זה מוכיח דרך הומ' ש- $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) לא הומיאומורפי ל- $\mathbb{R}$.

* להוכיח ש- $\mathbb{R}^2$ לא הומיאומורפי ל- $\mathbb{R}^3$ זה הרבה הרבה יותר קשה.

* הקשירות מאפשרת להוכיח שקטע $[a,b]$ לא הומיאומורפי לאף קטע (c,d).

מכיוון שבסגור יש 2 נק' שאם מוציאים אותם נשארים עם קטע קשיר.
לעומת זאת בקטע פתוח זה לא נכון.

ולכן

$$[a,b] \not\cong (c,d).$$

* זהו שיש תכונה שמאפשרת להבחין שהטופולוגיה היא נשמרת ע"י הומיאומורפיזם.

__26.11.08__

__הגדרה:__

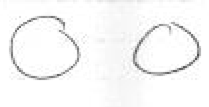
יהי X מ"ט. $x \in X$.

נסמן ב- $C(x)$ - איחוד כל תתי הקבוצות הקשירות המכילות את הנק' x.

(זה לא ריק כי למשל $\{x\}$ נמצא שם).

$C(x)$ קשירה. (האיחוד של קב' קשירות שחיתוכן לא ריק).

$C(x)$ נקראת __המרכיב הקשיר של x__

* במרחב הדיסקרטי מרכיב קשיר של כל נק' הוא רק $\{x\}$ - הנק'.
* גם ב- $\mathbb{Q}$ - המרכיב הקשיר של כל $q \in \mathbb{Q}$ הוא $\{q\}$.
(כי קב' קשירה בישר היא קטע).
* אם X מרחב קשיר אז לכל $x \in X$, $C(x) = X$.
* אם יש רק 2 מעגלים  המרכיב הקשיר של כל נק' באחד המעגלים זה המעגל שלה.

* יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ מרחבים טופולוגיים ו- $x_\alpha \in X_\alpha$.

$$x = (x_\alpha) \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$