19.11.08

בס״ד

## דוגמאות:

1. X מ״ט, $A \subseteq X$ ק׳.

נגדיר יחס שקילות באופן הבא:

מחלקות השקילות הן: A וכל נק׳ בודדת 1 מהמשלים של A.

$$\{A\} \cup \{\{x\} \mid x \in X \setminus A\}$$

כלו׳ $x \sim x \xLeftrightarrow{\text{אמ״מ}} x \in X \setminus A$

ו- $x, y \in A \xLeftrightarrow{\text{אמ״מ}} x \sim y$

היחס אז מסומן - $X/A$.

בעצם מה שעושים זה - מצמצמים את הקב׳ A לנק׳ 1,

במרחב X נחשבת כמו נק׳ 1.

אם $A \subset X$ סגורה או פתוחה אזי העתקת המנה $p: X \to X/A$ היא הומיאומורפיזם של $X \setminus A$ על תמונתו במרחב המנה - $X/A$.

כלו׳ הומיאומורפיזם של $X \setminus A$ על -

$$\{\{x\} : x \in X \setminus A\}$$

למשל:

יהי $X = [0,1]$ ו- $A = \{0,1\}$ שתי הנק׳ הנ״ל.

אז מרחב המנה זה כמו מעגל - כי 2 הנק׳ הנ״ל הופכות לאחת - כמו שיש עיגול שמקוון ויש 2 נק׳ שהן אחת.

את ההומיאומורפיזם למעגל נותן φ:

$$\varphi: [0,1]/\{0,1\} \to S^1$$

$$\varphi = \begin{cases} \{x\} \to e^{2\pi i x} & 0 < x < 1 \\ 1 & x \in \{0,1\} \end{cases}$$

המשך

2. נגדיר על $\mathbb{R}$ יחס שקילות.

$$x \sim y \iff x-y \in \mathbb{Z}.$$

מסמנים את מרחב המנה של היחס הנ"ל ב- $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

אז $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

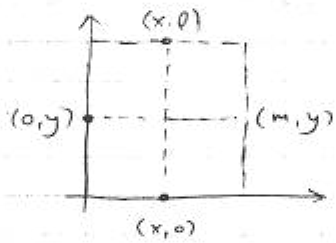
$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \sim S^1$$

כי דרך אחת לחשוב מה קורה ב- $[0,1]$ - זה מייצג את מה שקורה בכל $\mathbb{R}$. והרי 0 ו- 1 שקולים - לאותה מחלקת שקילות.

כמו בדוגמא הקודמת מקבלים את המעגל.

3. $X=[0,1]\times[0,1]$ - ריבוע היחידה.

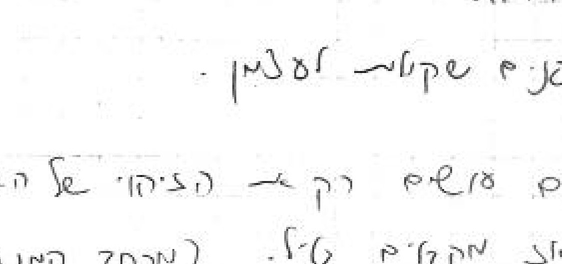
נגדיר שהפנים שקולים לעצמן.




אם עושים רק את הזיהוי של האנכיות אז מקבלים גליל. (מרחב המנה יהיה גליל)
אם עושים גם את הזיהוי של האופקיות אז מקבלים טורוס - כמו צמיגה.

זה הומיאומורפי ל- $S^1 \times S^1$.

4. $X$ מ"ט ונתבונן במכפלה הקרטזית $X \times [0,1]$.




ונתבונן ב- $X \times \{1\}$ זוהי ת"ק סגורה של $X\times[0,1]$ (יש לה משלים פתוח).

המשך:

נזהה את כל הנק' של $X\times\{1\}$ למחלקת שקילות אחת.

ואז - $X\times[0,1] / X\times\{1\}$ זה חרוט מעל $X$.

משפט:

יהיו $X$ ו-$Y$ מ"ט.

$p$ העתקה רציפה מ-$X$ על $Y$.

התנאים הבאים שקולים:

1. $p$ העתקת מנה ( $\tau_p = \tau_Y$ הטופולוגיה על $Y$ היא טופו' המנה)
2. לכל מ"ט $Z$ ולכל העתקה $f: Y \to Z$ מתקיים - $f$ רציפה אם $f\circ p$ רציפה.

הוכחה:

$\Leftarrow$ נניח כי $p$ העתקת מנה.

יהי $Z$ מ"ט ו- $f: Y \to Z$ וידוע כי $f\circ p$ רציפה.

נוכיח כי $f$ רציפה.

תהי $U\subset Z$ פתוחה, נרצה להראות ש- $f^{-1}(U)$ פתוחה ב-$Y$.

ידוע לנו ש- $(f\circ p)^{-1}(U)$ פתוחה ב-$X$.

$$(f\circ p)^{-1}(U) = p^{-1}(f^{-1}(U))$$

אבל $p$ העתקת מנה -

מההגדרה -

$f^{-1}(U)$ פתוחה בהכרח ב-$Y$

(כי זה = טופולוגיית המנה)

$\Downarrow$

$f$ רציפה.

$\Downarrow$

המשך

$\Longleftarrow$ להפך, נניח כי תמונה $z$ העתקת-מנה.

נרצה להוכיח ש- $\tau_Y = \tau_p$.

ידוע כי $\tau_Y \subset \tau_p$ מכיוון שידוע ש-$p$ רציפה.

($\tau_p$ ידועה כטופולוגיה הגדולה ביותר שעבורה $p$ רציפה)

נוכיח את ההכלה ההפוכה.

כמו $Z$ ניקח את $Y$ אבל לא עם הטופולוגיה שנתונה לנו

אלא טופולוגיית המנה.

ו- $f$ פונק' הזהות.

$$X \xrightarrow{p} Y \xrightarrow{Id} (Y, \tau_p)$$

$Id \circ p$ זה בדיוק העתקת המנה של $X$ על $Y$.

ולכן היא העתקה רציפה.

$\Leftarrow$ $Id$ רציפה לכן אם לוקחים למרחב המנה קב'

פתוחה ב- $\tau_p$, התמונה ההפוכה שלה (= היא

עצמה) פתוחה ב- $\tau_Y$

$\Downarrow$

$\tau_p \subset \tau_Y$

$\Downarrow$

יש שוויון.

משפט:

נניח כי $p: X \to Y$ פונק' על, והיא העתקת המנה.

ויהי $Z$ מ"ט ו- $q: Y \to Z$ פונק' על.

מתקיים:

$$\tau_q = \tau_{q \circ p}.$$

ההוכחה תרגיל בית.

דסל

**הגדרה:**

יהיו $X$ ו- $Y$ 2 קבוצות.

$R$ יחס שקילות על $X$, $S$ יחס שקילות על $Y$.

ותהי $f: X \to Y$.

נאמר כי $f$ <u>שומרת שקילות</u> אם -

$$x_1 R x_2 \Longrightarrow f(x_1) S f(x_2)$$

במצב כזה אפשר באופן טבעי להגדיר פונק' משפחת מחלקות השקילות של $X$ למשפחת מחלקות השקילות של $Y$. כך -

$$f': X/R \to Y/S$$

$$f'([x]) := [f(x)]$$

ההגדרה אינה תלויה בבחירת הנציג מכיוון ש- $f$ שומרת שקילות. גם אם לוקחים נציג אחר - נקבל $f(y)$ שעדיין שקול ל- $f(x)$.

באופן סכמטי אפשר לרשום -

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ X/R \arrow[r, "f'"'] & Y/S \end{tikzcd}$$

$q$ ו- $p$ העתקות מנה.

**משפט:**

יהיו $X$ ו- $Y$ מרחבים טופולוגיים.

$R$ יחס שקילות על $X$ ו- $S$ יחס שקילות על $Y$.

$f: X \to Y$ העתקה שומרת שקילות.

תהי $f'$ הפונק' שהוגדרה לעיל.

1. אם $f$ רציפה אז $f'$ רציפה (בטופולוגיות המנה המתאימות).
2. אם $f$ העתקת מנה אזי גם $f'$ העתקת מנה.

בס"ד

* כשאומרים - אם $q$ העתקת מנה - צ"ל -
אם $f$ פונק' על, רציפה והטופולוגיה על הטווח היא טופולוגית המנה.

הוכחה:

1. בסכמה שצריך רק להראות ש- $q\circ f = f'\circ p$.
נניח כי $f$ רציפה.
אזי $q\circ f$ רציפה - כהרכבת 2 פונק' רציפות.

והרי - $q\circ f = f'\circ p$ רציפה

עפ"י המשפט שהוכחנו במקרה כזה, ש-$p$ העתקת-מנה
! - $f'\circ p$ רציפה -
נובע כי $f'$ רציפה.

2. נניח כי $f$ העתקת מנה. נרצה להוכיח ש- $f'$ העתקת מנה.
ראשית: צ"ל: $f'$ היא על.

$q$ היא על, $f$ היא על) $\Leftarrow$ $q\circ f$ על $Y/S$

$\Leftarrow$ $f'\circ p$ העתקה על $Y/S$.

לכן התמונה של הרכבה מוכלת בתמונה של
המרכיב השני (פה - $f'$) - ולכן קל וחומר
נשנה הן חוזה ש-

$$\mathrm{Im} f' = Y/S$$

$\Downarrow$

$f'$ פונק' על.

מהמשפט הקודם (שהוכחנו תרגיל ד') הרכבה של העתקות מנה
היא העתקת מנה. $\Leftarrow$

$f'\circ p$ העתקת מנה
$(= q\circ f)$

המשך

אבל נובע משם גם שאם $p$ העתקת מנה ו-

$p \circ f$ העתקת מנה

אז $f$ העתקת מנה.

כדרוש.

## תכונות טופולוגיות של מרחבים טופולוגיים

הגדרה:

מרחב טופולוגי $X$ נקרא קשיר אם אינו איחוד של 2 קב׳ פתוחות לא ריקות וזרות.

(אפשר גם להחליף את המילה פתוחות ב-סגורות, כי אם

ז״ $X_1, X_2$ ו- $X = X_1 \cup X_2$ כך ש- $X_1, X_2 \neq \emptyset$ ו- $X_1 \cap X_2 = \emptyset$

אזי הן משלימות אחת של השניה ולכן הן סגורות גם כן

ולהיפך - אם יש פירוק לקב׳ סגורות אז יש פירוק גם של פתוחות - כמשלימות אחת של השניה.)

הגדרה נוספת לקשירות:

מרחב טופולוגי $X$ יקרא קשיר אמ״מ ($\Longleftrightarrow$) הקבוצות היחידות של המרחב $X$ שהם גם פתוחות וגם סגורות הן $X$ ו- $\emptyset$.

השקילות בין ההגדרות:

$\Longrightarrow$ ברור, אם אינו קשיר אז יש את 2 הקב׳ הנ״ל.

$\Longleftarrow$ אם יש קב׳ $\emptyset \neq A \subsetneq X$ כך שהיא גם פתוחה וגם סגורה

אז נכתוב $X = A \cup X \setminus A$ ולכן לא קשיר.

הגדרה:

$X$ מ״ט, $A \subset X$.

תת קב׳ $A$ קשירה אם בטופולוגיה היחסית שלה היא מרחב קשיר.

<u>דוגמאות:</u>

1. <u>מרחב סרפינסקי</u> - $X = \{0,1\}$

$$\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$$

המרחב הזה קשיר מכיוון שאין לו פירוקים לא טריוויאליים.
מכיוון ש- $\{1\} \notin \tau$.

2. <u>מרחב דיסקרטי</u> שיש בו לפחות 2 נק' הינו מרחב לא קשיר.
(זה שהטופולוגיה שלו זה כל תת״ק של X - קל להצדיק).
במרחב הדיסקרטי כל תת״ק של X היא גם פתוחה וגם סגורה.

3. $\mathbb{Q}$ איננה קשירה (עם הטופולוגיה היחסית שדומה מהאוקלידית).
אפשר לפרק אותה -

$$\mathbb{Q} = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2\} \cup \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 > 2\}$$

שתיהן פתוחות, לא ריקות וזרות.

4. קל כל הקרניים $\Sigma := \{\{x : x \le b\}, \{x : x > a\}\}$
נתבונן בטופולוגיה הנוצרת ע"י $\Sigma$ - $\tau(\Sigma)$ - טופולוגיה על $\mathbb{R}$.
בסיס של $\tau(\Sigma)$ הוא משפחת כל הקטעים $\{(a,b]\}$
זו נקראת <u>טופולוגיית הגבול העליון</u>.

טופולוגיה זו עדינה יותר מהטופולוגיה האוקלידית ב- $\mathbb{R}$. (שאלה 3 ת' 2)
נסמן את $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הזו כ- $\mathbb{R}_u$.
$\mathbb{R}_u$ אינו קשיר.

$$\mathbb{R}_u := (-\infty, 0] \cup (0, \infty)$$

שתיהן פתוחות, זרות, ולא ריקות.

<u>טענה:</u>

מ"ש X קשיר <u>אמ"מ</u> <u>לא</u> קיימת פונ' רציפה מ- X על $\{0,1\}$ דיסקרטי.

(באמת יש קבוצה אחת בדיוק דק̄ שלא קשיר, אז עדין ולפ

צ"ל:

X לא קשיר $\iff$ קיימת $f: X \to \{0,1\}$ על, רציפה.

הוכחה:

$\Rightarrow$ אם קיימת אז יש פירוק -

$$X = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)$$

הקב' פתוחות (תמונות הפוכות של פתוחות ע"י פונק' רציפה) זרות ולא ריקות כי f על.

$\Leftarrow$ אם לא קשיר אז יש פירוק $X = X_1 \cup X_2$ -

אז f הנ"ל רציפה -

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in X_1 \\ 1 & x \in X_2 \end{cases}$$

משפט:

תת קבוצה של $\mathbb{R}$ שיש בה יותר מנק' אחת, היא קשירה $\iff$ היא קטע (כמובן הרחב, גם קרניים, גם כל הישר).

הוכחה:

* נק' בודדת - רק נק' אחת היא קשירה בבירור...

$\Rightarrow$ יהי I קטע, אז קיימת $f: I \to \{0,1\}$ על, רציפה משפט ערך הביניים - אם מקבלת 0 ו-1 תהיה חייבת לקבל גם ערך בין לבין - בקטע $(0,1)$.

$\Leftarrow$ נניח ש- $\mathbb{R} \supseteq I$ קשירה ויש בה יותר מנק' אחת.

נרצה להוכיח ש- I קטע. די להוכיח את התכונה הבאה -

אם $x,y \in I$ אז לכל $x < c < y$ גם הוא $c \in I$.

בס"ד

<u>המשך.</u>

נניח בדרך השלילה כי יש $x_1 < x_2 \in I$ ו- $x_1 < a < x_2$

אך $a \notin I$.

אם כך אז אפשר לכתוב:

$$I = (I \cap (-\infty, a)) \cup (I \cap (a, \infty))$$

אלו הן 2 קב' זרות,

פתוחות בטופולוגיה היחסית ב-$I$ ולא ריקות

(באחת יש $x_1$ ובשניה $x_2$).

$\Leftarrow$ סתירה לקשירות של $I$.

הקשירות היא תכונה טופולוגית, מועברת ע"י הומיאומורפיזם.

אם יש 2 מרחבים הומיאומורפיים ואחד קשיר, אז גם השני.

אך גם יותר מזה: (לא חובה הומיאומורפיזם)

<u>משפט:</u>

אם $f$ רציפה מ-$X$ על $Y$. ו-$X$ מרחב קשיר, אזי גם $Y$ קשיר.

הרבה פעמים מוכיחים לגבי קשירות בדרך השלילה.

<u>הוכחה:</u>

הוכחה בדרך השלילה - נניח כי $Y$ לא קשיר.

$$Y = Y_1 \cup Y_2$$

$Y_1, Y_2$ פתוחות, זרות ולא ריקות.

ואז:

$$X = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$$

כי אלו הן קב' פתוחות (מרציפות $f$), לא ריקות

כי $f$ על וברור שזרות - כי $Y_1$ ו- $Y_2$ זרות.

לסתירה! לקשירות $X$.

בס"ד

**משפט:**

יהי X מ"ט, $\{A_i\}_{i\in I}$ משפחה של תת קשירות של X.

אם $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, אז האיחוד $\bigcup_{i\in I} A_i$ הוא קב' קשירה.

**הוכחה:**

תהי $f: B \to \{0,1\}$ (דיסקרטי) רציפה. (תמיד יש כזו, קבועה אגב.)

לא אמרנו שהוא על). נראה בסוף כזו לא יכולה להיות על.

תהי $x \in \bigcap_{i\in I} A_i \subset B$

נסמן $r = f(x)$.

יהי $i \in I$ משהו שרירותי.

$f|_{A_i} : A_i \to \{0,1\}$ רציפה גם היא - כצמצום.

$A_i$ קשירה ולכן $f|_{A_i}$ איננה על.

$x \in A_i$ ולכן $f|_{A_i} \equiv r$

חייבת להיות קבועה!!

לכן לכל $i \in I$

$\Downarrow$

$f \equiv r$ ב- $B = \bigcup_{i\in I} A_i$

ולכן f לא על

! B - קשירה.

■

**הגדרה:**

יהי V מרחב לינארי.

ת"ק $C \subseteq V$ נקראת קמורה אם לכל $x_1, x_2 \in C$ מתקיים

$$[x_1, x_2] := \{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \mid 0 \le \lambda \le 1\} \subset C$$

**מסקנה:**

אם $C \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה קמורה אזי $C$ קשירה.

**הוכחה:**

תהי $a \in C$.

לכל $x \in C$ הקטע $[a, x]$ מוכל ב- $C$.

אפשר לכתוב:

$$C = \bigcup_{x \in C} [a, x]$$

כל קטע כזה הוא קשיר. (הוכחנו) והחיתוך לא ריק:

$$\bigcap_{x \in C} [a, x] = \{a\} \neq \emptyset$$

$$\Downarrow$$

מהמשפט - $C$ קשירה.

**משפט:**

נניח כי $\{A_i\}$ משפחה של תת קבוצות קשירות של מרחב טופולוגי.

נניח כי קיימת $A_{i_0} \neq \emptyset$ במשפחה, עבורה:

$A_{i_0} \cap A_i \neq \emptyset$ לכל $i \in I$

אזי $\bigcup_{i \in I} A_i$ קשירה.

**הוכחה:**

נגדיר משפחה חדשה: $B_i = A_{i_0} \cup A_i$ $i \in I$

כל $B_i$ תהיה קשירה.

$\bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} A_i$ - !

אבל $\bigcap_{i \in I} B_i \supseteq A_{i_0}$

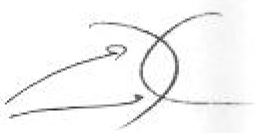
ומכאן זה ינבע.

רס"פ

הערה:

חיתוך של 2 קב' קשירות לא חייב להיות קשיר.

למשל -



החיתוך זה 2 הנק' וזה מן הסתם לא קשיר.

20.11.08

* יהא X מ"ט, $\{A_i\}_{i\in I}$ משפחה של תת"ק קשירות כאלו המקיימות -

$A_i\cap A_j\neq\emptyset$ לכל $j,i\in I$

אז - $\bigcup_{i\in I} A_i$ קשירה.

הוכחה:

בוחרים $i_0\in I$, לכל $i\in I$ ונסמן -

$B_i=A_{i_0}\cup A_i$ קשירה לכל $i$

אז $\bigcup B_i=\bigcup A_i$

ואז -

$\emptyset\neq A_{i_0}\subset\bigcap B_i$

ולכן זה נסגר והאיחוד קשיר.

משפט:

יהי X מ"ט, $A\subset X$ קשירה.

אם $A\subseteq B\subseteq\bar{A}$ אז $B$ קשירה.

(בפרט - $\bar{A}$ קשירה).

הוכחה:

אחרי הדוגמא.

דוגמא:

ניקח - $A=\{(x,\sin\frac{1}{x}),\ 0<x\leq 1\}$ זה גרף של פונק'