משפט:

אם $B_\alpha \subset X_\alpha$ לכל $\alpha \in A$ אזי-

$$\prod_{\alpha\in A} \overline{B_\alpha} = \overline{\prod_{\alpha\in A} B_\alpha}$$

בפרט-

מכפלה קרטזית של קב' סגורות היא סגורה. (כי אז כל קב' שווה לסגירתה)

הוכחה:

יהי $x \in \overline{\prod B_\alpha}$. (נראה את ההכלה $\subseteq$)

רוצים להוכיח ש- $x_\alpha \in \overline{B_\alpha}$ לכל $\alpha \in A$.

צ"ל נראה שלכל סביבה של x_α יש חיתוך לא ריק עם $\overline{B_\alpha}$. (ומספיק להראות את זה לסביבות פתוחות). אז יהי $\alpha_0 \in A$

אז תהי U_{α_0} סביבה פתוחה של x_{α_0} במרחב X_{α_0}.

נתבונן ב- $p^{-1}_{\alpha_0}(U_{\alpha_0})$ - כמובן שהיא פתוחה במכפלה.

ובנוסף ברור ש- $x \in p^{-1}_{\alpha_0}(U_{\alpha_0})$.

לכן-

$$p^{-1}_{\alpha_0}(U_{\alpha_0}) \cap \prod B_\alpha \neq \emptyset$$

יש-

$$y = (y_\alpha)_{\alpha\in A} \in p^{-1}_{\alpha_0}(U_{\alpha_0}) \cap \prod B_\alpha$$

$\Longleftarrow$ $y_\alpha \in B_\alpha$ לכל $\alpha \in A$

כמו כן - $y_{\alpha_0} = p_{\alpha_0}(y) \in U_{\alpha_0}$.

המשך

וסוף -

$$y_{\alpha_0} \in U_{\alpha_0} \cap B_{\alpha_0}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\forall \alpha_0 \in A \quad y_{\alpha_0} \in U_{\alpha_0} \cap B_{\alpha_0} \right)$$

במילים אחרות, כל סביבה של x_{α_0} חותכת את B_{α_0}

$$\Downarrow$$

$$x_{\alpha_0} \in \overline{B_{\alpha_0}}$$

$\supseteq$ - הוכחת ההכלה הזו - תרגיל בית.

משפט:

(X_α, τ_α) משפחה של מרחבים טופולוגיים.

יהיו $B_\alpha \subset X_\alpha$ לכל $\alpha \in A$.

אז $\prod_{\alpha \in A} B_\alpha \subset \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ הטופולוגיה היחסית וטופולוגיית המכפלה של

$(B_\alpha, \tau_{\alpha B_\alpha})$ מזדהות.

הוכחה:

תרגיל בית.

* אפשר לומר שבעצם שהגדרנו עבור $\prod X_\alpha$ היא הטופולוגיה הקטנה ביותר עבורה כל ההטלות הקנוניות רציפות.

מדוע?

מה נדרש כדי שכל P_α תהיה רציפה?

אם ניקח $\alpha_0 \in A$ מסוים, $U_{\alpha_0} \subset X_{\alpha_0}$ פתוחה רוצים

ש- $P_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0})$ פתוחה במכפלה.

השקף

צין: הטופולוגיה הנדרשת היא זו שבה כל אלה פתוחות.
והיא קטנה ביותר אם כל הקבוצות מהוות תת בסיס - כמו שהגדרנו פה
כשהגדרנו את P_α.

משפט:

יהי Y מ"ט ! - $f: Y \to \prod X_\alpha$

f רציפה $\iff$ כל $P_\alpha \circ f$ (כל הרכבה של f עם ההטלות הקנוניות)
רציפה.
(לשים לב: $P_\alpha \circ f: Y \to X_\alpha$)

הוכחה:

ברור שהכיוון $\Longleftarrow$ טריוויאלי. הרכבת רציפות רציפה.

$\Longrightarrow$ נניח כי כל $P_\alpha \circ f$ רציפה.

נרצה להוכיח כי f רציפה.

צריך הרי לבדוק שתמונה הפוכה של קבוצה פתוחה היא פתוחה.
מספיק לבדוק עבור קבוצות שהן תת בסיס של הטופולוגיה.
יש לנו תת בסיס נוח.

יהי $\alpha \in A$ וניקח $U_\alpha \subset X_\alpha$ פתוחה

$P_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ - קבוצה טיפוסית מתת הבסיס של $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

ונצטרך להתבונן ב- $f^{-1}(P_\alpha^{-1}(U_\alpha))$ -

האם פתוחה?

אכן -

$$f^{-1}(P_\alpha^{-1}(U_\alpha)) = (P_\alpha \circ f)^{-1}(U_\alpha)$$

$$\downarrow$$

וזהי פתוחה כי U_α פתוחה !

$P_\alpha \circ f$ רציפה.

$\Longleftarrow f$ רציפה.

דוגמא:

תהא $f:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ פונקציה.

אז מההרכבה של f עם ה-P_iים מקבלים n פונק-

$f=(f_1,\dots,f_n)$ כך ש-

$f_i:[0,1]\to\mathbb{R}$

ואז המשפט הנ"ל אומר ש-f רציפה אמ"מ f_i רציפה לכל i.

($\Leftarrow$ מיידי)

מרחב טופולוגי מעניין הוא:

$[0,1]^{\mathbb{N}}$ - כל הפונק' מ-$\mathbb{N}$ ל-$[0,1]$.

והוא נקרא - <u>הקוביה של הילברט</u>

<u>מרחבי מנה</u>

יהי (X,τ) מ"ט, Y קבוצה, ו- $p:X\to Y$ על Y.

נתבונן ב-

$$\tau_p=\{U: U\subset Y,\ p^{-1}(U)\in\tau\}$$

בX פתוחה.

קל לבדוק כי המשפחה הנ"ל - τ_p היא טופולוגיה על Y.

(תרגיל בית)

הטופולוגיה הזו נקראת - <u>טופולוגית המנה של Y</u>. p נקראת <u>העתקת מנה</u>

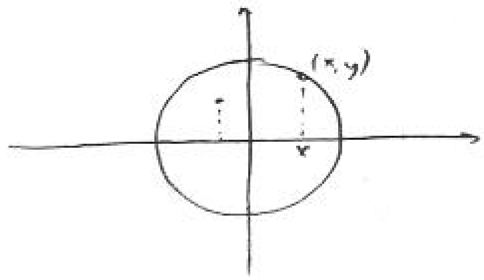
X ו-p משרים את הטופולוגיה הזו - הם המגדירים אותה.

הטופולוגיה הזו היא הגדולה ביותר מבין כל הטופולוגיות על Y המקיימות ש-p רציפה.

(ע"פ ההגדרה - זה המקס', כל דבר אחר שבו $p^{-1}(\ )$ שלו זה ב-τ.)

דוגמאות:

1. נתבונן בעיגול היחידה וניקח את ההטלה של העיגול הנ"ל על
$[-1,1]$



אז $[-1,1]$ הוא מרחב מנה של העיגול הנ"ל

2. ב- $[0,1]$ ניקח את הפונ' האופיינית (מקבלת רק 0 ו-1)

$$\chi_{[\frac{1}{2},1]} : [0,1] \longrightarrow \{0,1\}$$

מהן הקב' שנותנות טופולוגיה?

$\{0\}, \{0,1\}, \emptyset$

↓

כי

$$\chi^{-1}(\{0\}) = [0,\tfrac{1}{2})$$

שזוהי קב' פתוחה בטופולוגיה היחסית
ש- $\mathbb{R}$ משרה על $[0,1]$.

יהיו X ו- Y מרחבים טופולוגיים

$p: X \to Y$ פונק' על Y, רציפה.

מהם התנאים לכך ש- p העתקת מנה? (כאשר יש כבר טופולוגיה על Y).

תנאים מספיקים:

p העתקת מנה אם לפחות אחד מהתנאים מתקיים:

↓

המשך

באופן כללי העתקת מנה לא חייבת להיות פתוחה וסגורה אבל פה זה מספיק כדי להפוך את P להעתקת מנה.

א. P פתוחה.

ב. P סגורה.

ג. קיימת פונק' רציפה $q: Y \to X$ המקיימת - $p \circ q = Id_Y$

תרגיל בית - לבדוק שאכן אלו תנאים מספיקים.

טענה: (להוכיח).

F תת"ק של Y, סגורה בטופולוגיית המנה (במקרה הכללי) אמ"מ $p^{-1}(F)$ סגורה ב- X.

יהי X מ"ט.

R יחס שקילות על X. משפחת מחלקות השקילות - X/R.

יש העתקה מ- X ל- X/R שמתאימה לכל איבר את המחלקה שלו. $p: X \to X/R$

$p(x) := [x]$.

מהי העתקה על.

אז אפשר להגדיר את טופולוגיית המנה.

כל העתקת מנה היא מהצורה הזו.

כי אם $p: X \to Y$ על (Y קבוצה) אפשר לומר שזה נוצר ע"י יחס שקילות - נגדיר יחס שקילות -

$x_1 \sim x_2$ אם"ם $p(x_1) = p(x_2)$.

$\Leftarrow$ יש התאמה חח"ע בין Y ל- X/R.

זוהי הדרך להגדיר טופולוגיית מנה.