בהקשר זה, קוראים ל-$Y$ המצויד בטופולוגיה היחסית, תת מרחב של המרחב $X$.

12.11.08

**דוגמאות נוספות:**

על הישר $X=\mathbb{R}$.

$Y=(0,1)\cup\{2\}$.

ואם $\tau$ הטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}$, אז הקבוצה $\{2\}$ פתוחה בטופולוגיה היחסית שמושרית על $Y$.

**משפט:**

יהיו $(X,\tau)$, $Y$ כמו קודם.

ולכל $A\subset Y$ מתקיים:

$$\bar{A}^{\tau_Y}=\bar{A}\cap Y$$

**בפרט:**

$A\subset Y$ סגורה ב-$\tau_Y$ $\Longleftrightarrow$ קיימת $F$ סגורה ב-$X$ עבורה $A=F\cap Y$.

**הוכחה:**

תרגיל בית (כל ההוכחות שמשאירים כתרגילי בית יכולות להיות במבחן!)

**משפט:**

יהי $(X,\tau)$ מרחב טופולוגי: $Z\subset Y\subset X$

מתקיים $\tau_Z=(\tau_Y)_Z$

אלו הן 2 הדרכים להשרות טופולוגיה על $Z$

והן שוות.

**הוכחה:**

תרגיל בית.

# פונק' רציפות

**הגדרה:**

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה ב- $x\in\mathbb{R}$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ המקיים:

$$|x'-x|<\delta \implies |f(x')-f(x)|<\varepsilon$$

**הגדרה כללית:**

יהיו $X$ ו- $Y$ מרחבים טופולוגיים.

$f:X\to Y$. (נאמר כי) $f$ רציפה ב- $x\in X$ אם לכל סביבה $U$ של $f(x)$, $f^{-1}(U)$ סביבה של $x$.

**משפט:**

אם $(X,d_X)$, $(Y,d_Y)$ מרחבים מטריים, $f:X\to Y$ רציפה ב- $x\in X$ $\iff$ לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ המקיים:

אם $x'\in X$, $d_X(x,x')<\delta$ אז:

$$d_Y(f(x),f(x'))<\varepsilon$$

**הוכחה:**

תרגיל בית.

**הגדרה:**

$X,Y$ מ"ט.

$f:X\to Y$ נקראת רציפה אם היא רציפה בכל $x\in X$.

**דוגמאות:**

1. יש לנו מחדו"א 3 הגדרה של רציפות עבור $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ (ע' כל נק')
אז ההגדרה מזדהה עם ההגדרה הנ"ל - שפה.
ולכן כל אותן פונק' רציפות שאנחנו מכירים, יהיו רציפות גם פה.

2. $X$ מ"ט. $I_d:X\to X$ , $I_d(x)=x$ פונק' הזהות רציפה.

הנ"ל רציפה כי כשלוקחים סגירה U בתמונה, התמונה ההפוכה שלה תהיה דווקא U שהוא סגירה של X.

3. X ו-Y מ"ט.

תהי $a \in Y$. ונגדיר $f: X \to Y$ ע"י:

$$f(x) = a \quad \forall x \in X$$ - הפונק' הקבועה

גם היא, כמובן, רציפה.

<u>משפט:</u>

יהיו X ו-Y מ"ט. $f: X \to Y$. הטענות הבאות שקולות:

א) f רציפה.

ב. התמונה ההפוכה של כל קב' פתוחה ב-Y, היא פתוחה ב-X.

ב'. עבור בסיס מסוים $\Sigma$ של Y, התמונה ההפוכה של כל איבר מ-$\Sigma$ הוא קב' פתוחה ב-X.

ג. התמונה ההפוכה של כל קב' סגורה ב-Y, היא סגורה ב-X.

ד. לכל $A \subset X$ מתקיים:

$$f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$$

<u>הוכחה:</u>

דרך ההוכחה תהיה - א $\Rightarrow$ ב $\Rightarrow$ ג $\Rightarrow$ ד $\Rightarrow$ א

ב $\Leftrightarrow$ ב'

<u>נראה כי א $\Rightarrow$ ב</u>

נניח כי f רציפה ונסמן ב-U קבוצה פתוחה ב-Y.

<u>צ"ל:</u> $f^{-1}(U)$ פתוחה ב-X.

נראה זאת ע"י שנראה ש-$f^{-1}(U)$ היא סביבה של כל אחת מנקודותיה.

המשך

אז יהי $x \in f^{-1}(U)$, אז $f(x) \in U$

$U$ סביבה של $f(x)$ מכיון שלקחנו אותה יחד פתוחה.

$f$ רציפה ב-$x$ (רציפה בכל $\bar{x}$) לכן מההגדרה -

$f^{-1}(U)$ חייבת להיות סביבה של $x$.

$\Leftarrow$ $f^{-1}(U)$ סביבה של כל אחת מנקודותיה

שזה שקול להיותה פתוחה.

נראה לדוגמא גם ד $\Leftarrow$ א.

$x \in X$ נרצה להראות ש-$f$ רציפה ב-$x$.

תהי $N$ סביבה של $f(x)$, וצריך להראות ש-$f^{-1}(N)$ סביבה של $x$.

מהגדרת סביבה, קיימת $U$ פתוחה ב-$Y$ עבורה -

$$f(x) \in U \subset N$$

אם נוכיח כי - $f^{-1}(U)$ סביבה של $x$ אז בוודאי ש-

$f^{-1}(N)$ סביבה של $x$ כי -

$$f^{-1}(U) \subset f^{-1}(N)$$

נניח בשלילה כי $f^{-1}(U)$ אינה סביבה של $x$. כלומר אין אף קב' פתוחה שמוכלת בינהם.

נסמן $B = Y \setminus U$ - בוודאי סגורה כי משלימה של פתוחה.

ונסמן -

$$A = X \setminus f^{-1}(U)$$

ע"פ ד -

$$f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subset \bar{B} = B = Y \setminus U$$

$B$ סגורה

## המשך

דרכמנו ונסמן כי $x \in \bar{A}$.

אם $V$ סביבה של $x$ - אז מתקיים $V \subset f^{-1}(U)$.

כאן ש- $V \cap (X \setminus f^{-1}(U)) \neq \emptyset$

$$V \cap A \neq \emptyset$$

$\Leftarrow$ $x \in \bar{A}$.

אבל זה ש- $x \in \bar{A}$ סותר את מה שכתבנו בעמוד הקודם שהרי יוצא ש-

$$f(x) \in Y \setminus U$$

אבל זכרנו $f(x) \in U$

$$\Downarrow$$

סתירה!

* הרכבה פעמים מוכיחים רציפות בעזרת קוד מהמשפט.

**משפט:**

$X, Y, Z$ מ"ט.

$$\text{רציפות} \left\{ \begin{array}{l} f: X \to Y \\ g: Y \to Z \end{array} \right.$$

אזי - $g \circ f$ רציפה.

**הוכחה:**

תרגיל בית.

בס"ד

טענה:
$X$ מ"ט.
$f,g: X \to \mathbb{R}$ רציפות.

א. לכל $\alpha \geq 0$, $|f|^\alpha$ רציפה.

ב. לכל $a,b \in \mathbb{R}$, $af+bg$ רציפה.

ג. $f \cdot g$ רציפה (כפל ממשיים).

ד. אם $f(x) \neq 0$ לכל $x \in X$, אזי גם $\frac{1}{f}$ רציפה.

הגדרה:
תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונק' ממשיות על מרחב טופולוגי $X$.
יהיו $f: X \to \mathbb{R}$,
נאמר כי הסדרה מתכנסת במ"ש ל-$f$ על $X$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N_\varepsilon$
המקיים -
עבור $n > N(\varepsilon)$ -

$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. לכל $x \in X$

משפט:
יהיו $X$ מרחב טופולוגי.
$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונק' ממשיות רציפות על $X$, המתכנסת במ"ש לפונקציה
$f: X \to \mathbb{R}$.
אזי - $f$ רציפה.

הוכחה:
תרגיל בית.

---

תהי $X$ קבוצה. $\{a_n\}$ סדרה של מס' חיוביים המקיימים $\sum a_n < \infty$
(הטור מתכנס). $\{f_n\}$ סדרה של פונק' ממשיות על $X$ המקיימות -

$|f_n(x)| \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N},\ x \in X$

המשך.

אז הטור. $f(x):=\sum f_n(x)$ מתכנס לכל $x\in X$.

הטור $\sum f_n$ מתכנס במ"ש (השארית דנ"ל של הטור = המרחק של הסכומים החלקיים) ל-$f$.

זה קריטריון ויירשטרס.

* וכמובן אם $f_n$ רציפות, אז מהמשפט - $f$ רציפה.

הגדרה:

$X$ ו-$Y$ מרחבים טופולוגיים. $f:X\to Y$.

$f$ נקראת פתוחה (סגורה) אם לכל $U\subset X$ פתוחה (סגורה), $f(U)$ פתוחה (סגורה) ב-$Y$.

הגדרה:

$X,Y$ מ"ט. $f:X\to Y$.

$f$ נקראת הומיאומורפיזם אם היא חח"ע, על, רציפה וגם $f^{-1}$ רציפה.

($f$ הומיאומורפיזם אמ"ם ($\Longleftrightarrow$) היא חח"ע, על, רציפה ופתוחה / סגורה).

* אם שני מרחבים הם הומיאומורפים - מבחינה טופולוגית אנחנו לא מבדילים ביניהם.

דוגמאות:

1. הזהות $Id:X\to X$ כמובן הומיאומורפיזם.

2. $(-1,1)\sim\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$

$$f^{-1}(y)=\frac{y}{1-|y|}$$

3. הפונק' $ax+b$ כאשר $a\neq 0$ היא הומיאומורפיזם של הקטע $(0,1)$ על הקטע $(b,a+b)$.

4. נסמן ב- $S^n$ את ספירת היחידה ב- $\mathbb{R}^{n+1}$.

$$S^n = \left\{ (x_1, x_2 \ldots x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$$

למשל $S^0 = \{-1,1\}$

$S^1 =$ מעגל היחידה

$S^2 =$ כדור היחידה

$\vdots$

(נתבונן ב- $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ (הספירה חוץ מהקוטב הצפוני שלה).
מגדירים את ההעתקה הסטריאוגרפית של $\bar{q}$ ב- $S^2 \setminus \{0,0,1\}$ ע"י חיבור הנק' $(x,y,z)$ ל- $(0,0,1)$ ואז הקו שנוצר דורקים מהי הנק' שבה הוא חותך את המישור. זו ההעתקה הסטריאוגרפית של הנק' על המישור.
ההעתקה הזו - נותנת לנו הומיאומורפיזם מ- $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ ל- $\mathbb{R}^2$ - המישור.
דוגמא להומיאומורפיזם הזה ראינו בהרצאה.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}, 0 \right)$$

---

תהי $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ משפחה של מרחבים טופולוגיים.
נדון את המכפלה הקרטזית של קב' אלו: $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$

זוהי קב' כל הפונק' כנ"ל:

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \left\{ x: A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \;\middle|\; x(\alpha) \in X_\alpha \quad \forall \alpha \in A \right\}$$

ונהוג לסמן $x_\alpha = x(\alpha)$.

אנחנו אלו הן מרחבים טופולוגיים - לא סתם קבוצות.

נגדיר טופולוגיה -

משפחת כל תתי הקבוצות של המכפלה $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ מהצורה -

$\prod_{\alpha\in A} \theta_\alpha$ כאשר $\theta_\alpha \subset X_\alpha$ תת קבוצה פתוחה, וכן $\theta_\alpha = X_\alpha$

פרט לקבוצה סופית של אינדקסים, היא בסיס לטופולוגיה על -

$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. נסמן משפחה זו ב-B.

צריך לבדוק שזה בסיס - לבדוק 2 תנאים -

- ראשית - שהאיחוד של אברי משפחה זו הוא כל המרחב - וזה נכון פה כי $\prod X_\alpha$ שייך למשפחה - לכן האיחוד הוא בדיוק הוא.
- לכל $U,V\in B$ ולכל $x\in U\cap V$ קיימת $W\in B$ המקיימת $x\in W\subset U\cap V$.

במקרה שלנו קל להראות זאת - מכיון שאצלנו כל חיתוך של 2 איברים למשפחה - גם הוא למשפחה.

<u>נראה זאת:</u>

נסמן את המשפחה הזו B. וניקח 2 קב' למשפחה -

$$\prod_{\alpha\in A} U_\alpha \, , \, \prod_{\alpha\in A} \theta_\alpha \in B$$

כל הגורמים פתוחים ! $\theta_\alpha = X_\alpha$ - חוץ מקב' סופית של אינדקסים $\alpha$.

↓

$\alpha \notin \{\alpha_1 \dots \alpha_n\}$

$\alpha \notin \{\alpha_1, \dots \alpha_m\}, \quad U_\alpha = X_\alpha$

↓

המשך.

דרוש ש-

$$\left(\prod_{\alpha\in A}\theta_\alpha\right)\cap\left(\prod_{\alpha\in A}U_\alpha\right) =$$

$$= \prod_{\alpha\in A}(\theta_\alpha\cap U_\alpha)$$

$\theta_\alpha\cap U_\alpha$ זהו חיתוך של 2 קב' פתוחות ולכן קב' פתוחה.

כמו כן- אם $\alpha\notin\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,\alpha'_1,\dots,\alpha'_m\}$

$$\theta_\alpha\cap U_\alpha = X_\alpha$$

$\Leftarrow$ החיתוך הנ"ל - $\prod_{\alpha\in A}\theta_\alpha\cap\prod_{\alpha\in A}U_\alpha$ הוא ב-B.

כדרוש. לכן B בסיס

* אם קב' האינדקסים - $A$, סופית, אז התנאי של "$\theta_\alpha = X_\alpha$ פרט לקב' סופית..." מיותר. זה יקרה ישירות.
  אלא פשוט נקבל את כל המכפלות של כל קבוצות.
* אם $A$ היא אינסופית וניקח מכפלה של קב' פתוחות $\prod_{\alpha\in A}\theta_\alpha$
  אם יש קב' אינסופית של גורמים שונים מ-$X_\alpha$, ולא ריקים
  עבור כל משפחה $A'\subset A$ אינסופית -- $\prod_{\alpha\in A'}\theta_\alpha$ אינה פתוחה!!
  - אינה מכילה אף קב' מ-$B$.

<u>דוגמאות</u>:

1. $X = \mathbb{R}^n$. הטופולוגיה של $\mathbb{R}^n$ היא טופולוגיה של מכפלה קרטזית.
   הרי הגדרנו אותה ע"י מטריקה, אך אפשר להגדיר בה טופולוגיה ע"י
   הכדורים ה-$n$ ממדיים פה.
   הכדורים האלו בכלל הם גם כדורים, רק במטריקת ה-max ולא האוקלידית

2. $X=\{0,2\}$ והטופולוגיה הדיסקרטית.

נתבונן ב- $X^{\mathbb{N}}$.

$$X^{\mathbb{N}} = \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} \mid a_n = 0 \,/\, a_n = 2 \right\}$$

זהו מרחב טופולוגי.

אבל המרחב הזה דומה לא חדש לנו - קב' Cantor היא דוגמא נוספת
מגדירה כקב' המספרים שבבסיס 3 יש להם פיתוח רק עם 0 או 2.

$$C := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} : a_n = 0 \,/\, a_n = 2 \right\}$$

המרחב $X^{\mathbb{N}}$ עם הטופולוגיה של המכפלה הקרטזית הומיאומורפי לקב' קנטור - $C$. ($C$ עם הטופולוגיה הרגילה על הישר)

ההומיאומורפיזם הוא:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

<u>תרגיל בית:</u>

להוכיח שזהו הומיאומורפיזם.

<u>הגדרה:</u>

יהי $\alpha_0 \in A$ נגדיר את הפונק'

$$P_{\alpha_0} : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to X_{\alpha_0}$$ ע"י

$$P_{\alpha_0}\left( (x_\alpha)_{\alpha \in A} \right) := x_{\alpha_0}$$

פונק' זו נקראת <u>ההטלה</u> על $X_{\alpha_0}$.

* זוהי פונק' רציפה ועבור $O_{\alpha_0} \subset X_{\alpha_0}$ פתוחה -

קס״פ

<u>המשך</u>

$$P_{\alpha_0}^{-1}(\theta_{\alpha_0}) = \prod_{\alpha\in A}(\theta_\alpha)$$ שייך לבסיס

כאשר $\theta_\alpha = X_\alpha$ פרט לאינדקס $\alpha = \alpha_0$.

ובעצם, אם נסתכל על המשפחה:

$$\left\{ P_\alpha^{-1}(\theta_\alpha) : \underset{\text{פתוחה}}{\theta_\alpha \subset X_\alpha}, \ \forall \alpha\in A \right\}$$

המשפחה הזו היא תת-בסיס של הטופולוגיה של המכפלה הקרטזית.

* כי אם ניקח חיתוך סופי - זה בדיוק -

$$\prod \theta_\alpha = \bigcap_{i=1}^{n} P_{\alpha_i}^{-1}(\theta_{\alpha_i})$$

כאשר $\theta_\alpha = X_\alpha$, $\alpha \notin \{\alpha_1 \dots \alpha_n\}$.

<u>בונוס</u> - ההטלה $P_{\alpha_0}$ היא גם תמיד <u>פתוחה</u>.

לא צריך לבדוק זאת עבור כל תת פתוחה של המכפלה הקרטזית -
די לבדוק זאת עבור קב' בסיס - אברי הבסיס.

ניקח $\prod \theta_\alpha$ מהבסיס של הטופולוגיה של המכפלה הקרטזית - הבסיס הרגיל.

$$P_{\alpha_0}\left(\prod \theta_\alpha\right) = \theta_{\alpha_0}$$

שהיא לפי הנחה פתוחה.

$\Leftarrow$ $P_{\alpha_0}$ העתקה פתוחה.