

1) הצגה: יהי X מרחב מטרי, ויהי $\varphi: X \rightarrow X$ פונקציה כוולנטית

אם $0 < \alpha < 1$ כך שכל $x_1, x_2 \in X$

$$d(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leq \alpha d(x_1, x_2)$$

אז φ נקראת הטת Banach

יהי X מרחב מטרי סגור ויהי $\varphi: X \rightarrow X$ כוולנטית, אז φ היא פונקציה קבועה.

הוכחה: יהי $x_n \in X$ נשזר באינדוקציה כל $n \in \mathbb{N}$ $x_{n+1} := \varphi(x_n)$

נראה כי $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ סדר קאשי: כל מספר $m > n$

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \alpha^k d(x_2, x_1) =$$

φ כוולנטית, $\{x_n\}$ נשזר, אז $d(x_2, x_1)$ מספר קבוע

$$= d(x_2, x_1) \sum_{k=n}^{m-1} \alpha^k \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0$$

X מרחב סגור, ולפיכך $\{x_n\}$ מתכנס למספר $a := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

$$\varphi(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = a$$

אכן a נקראת הטת φ .

כעת, יהי b נקראת הטת φ אולי:

$$d(a, b) = d(\varphi(a), \varphi(b)) \leq \alpha d(a, b) \Rightarrow d(a, b) = 0$$

אכן $a = b$

(*) כל כוולנטית φ היא פונקציה קבועה, כל $y_m \rightarrow c$ אז $\varphi(y_m) \rightarrow \varphi(c)$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d(\varphi(y_m), \varphi(c)) \leq \alpha d(y_m, c) \rightarrow 0$$

הצגה: כל $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ כל $\|y\| := (\sum_{i=1}^n y_i^2)^{1/2}$

נתון n פונקציות $\varphi_i(x_1(t), \dots, x_n(t), t)$ $x_i'(t) := \varphi_i(x_1(t), \dots, x_n(t), t)$

אז $\varphi := (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ פונקציה n קבועה

$$A := \{ (y_1, \dots, y_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|y - y^0\| \leq \delta, |t - t_0| \leq \eta \}$$

אז $t_0 \in \mathbb{R}, y^0 \in \mathbb{R}^n$ מספר

נניח כי φ מקיימת את תנאי ליפשיץ:

$$\forall (y, t), (\bar{y}, t) \in A \quad \|\varphi(y, t) - \varphi(\bar{y}, t)\| \leq K \|y - \bar{y}\|$$

עבור קבוע $K > 0$.

עבור פונקציה φ נתונה (1) נקבע $x(t_0) = y^0$

קיים פתרון יחיד $x(t)$ המקיים $x(t_0) = y^0$ ופותר את המשוואה:

$$x(t) = y^0 + \int_{t_0}^t \varphi(x(\tau), \tau) d\tau \quad (2)$$

נניח $0 < h < \min(\eta, \delta/M, 1/K)$

$$M := \sup_{\|t-t_0\| < \eta} \|\varphi(x(t), t)\| < \infty$$

ב- (2) נסתכל בתחום $[t_0 - h, t_0 + h]$

ה' X מרחב הפונקציות הרציניות $C([t_0 - h, t_0 + h], \mathbb{R}^n)$

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t_0 - h \leq t \leq t_0 + h} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|$$

כאן $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ ו- (X, d) מרחב מטרי.

$$Y := \{\varphi \in X : d(\varphi, y^0) \leq \delta\}$$

ה' (Y, d) מרחב מטרי (כי הוא תת-קבוצה סגורה של מרחב מטרי).

נגדיר $T: Y \rightarrow Y$ כך:

$$(Tx)(t) := y^0 + \int_{t_0}^t \varphi(x(\tau), \tau) d\tau$$

אם $x \in Y$ אז $Tx \in X$ ו- $Tx \in Y$ (כי Tx מקיימת את המשוואה).

$$\begin{aligned} d(Tx, y^0) &= \sup_{t_0 - h \leq t \leq t_0 + h} \|(Tx)(t) - y^0\| = \sup_{t_0 - h \leq t \leq t_0 + h} \left\| \int_{t_0}^t \varphi(x(\tau), \tau) d\tau \right\| \\ &\leq \sup_{t_0 - h \leq t \leq t_0 + h} \int_{t_0}^t \|\varphi(x(\tau), \tau)\| d\tau \leq hM \leq \delta \end{aligned}$$

כעת, נניח כי x היא פונקציה רצינית המקיימת את המשוואה (2). אז x היא פתרון יחיד של המשוואה (2).
נניח כי x היא פונקציה רצינית המקיימת את המשוואה (2). אז x היא פתרון יחיד של המשוואה (2).

(2)

טופולוגיה

20/1/09

נניח T כוונתו ϕ, ρ, ρ_0 $P'' \cap M, x, \bar{x} \in X$ דבר

$$d(Tx, T\bar{x}) = \sup_{t_0-h \leq t \leq t_0+h} \left\| \int_{t_0}^t [\varphi(x(\tau), \tau) - \varphi(\bar{x}(\tau), \tau)] d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \sup_{t_0-h \leq t \leq t_0+h} \int_{t_0}^t \|\varphi(x(\tau), \tau) - \varphi(\bar{x}(\tau), \tau)\| d\tau \leq$$

$$\leq \sup_{t_0-h \leq t \leq t_0+h} \int_{t_0}^t K \|x(\tau) - \bar{x}(\tau)\| d\tau \leq h K d(x, \bar{x})$$

אכן $0 < hK < 1$ השורה 'כ"ו' (Y, ρ) , (X, d) מרחבים מטריים, ומה: $f: X \rightarrow Y$ פונקציה f היא ρ דבר $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שכל $x_1, x_2 \in X$ המקיימים $d(x_1, x_2) < \delta$

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

הערה: כל פונקציה רציפה בה' היא רציפה, אכן לא כל פונקציה רציפה היא רציפה בה'.

דוגמה, הפונקציה $(0, \infty) \rightarrow (0, \infty): x \mapsto 1/x$ היא רציפה, אכן איננה רציפה בה'.משפט: מהי $f: X \rightarrow Y$ רציפה בה', ומה $\{x_n\}$ סדרת קושיב- X . אז $\{f(x_n)\}$ סדרת קושי ב- Y .משפט: נניח (Y, ρ) מרחב מטרי, ומה $A \subseteq X$. מה $f: A \rightarrow Y$ רציפה בה' אזי קיימת הנחיה ρ של f ב- A דבר Y , וההנחהש ρ היא רציפה בה'.הוכחה: מהי $x \in A$. אזי קיימת סדרת $\{x_n\} \subseteq A$ מתכנסת ל- x . אז סדרתקושי, ולכן ρ של $\{f(x_n)\}$ סדרת קושי. Y מרחב מטרי, ולכן הסדרת מתכנסת. (הערה)ההמשכה $F(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ ורציפה, ולכן ההמשכה ה' של f על A .ההמשכה טובה, כי אם ρ של $\{x_n\} \subseteq A$ מתכנסת ל- x , אז

$$f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), \dots \in \delta, \quad x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots \rightarrow x$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x'_n)) \quad \text{אם } x_n \text{ ו-} x'_n \text{ הם סדרות מתכנסות לאותו גבול}$$

$x_1, x_2 \in A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow p_1 p_2 \in \mathbb{R} \rightarrow p_1 p_2 : \text{sic} \cdot \varepsilon > 0$ "a"

$$d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon/2 \quad \text{sic} \quad d(x_1, x_2) < \delta/2 \quad \text{pic}$$
$$d(u', u'') < \delta/2 \quad \text{w.l.o.g., } u', u'' \in \bar{A} \quad \text{rot}$$

מילוי, $\{x_n\} \rightarrow \{x_n\}$, A-2 1730 1719 1510

$\delta - \alpha' \quad \delta - \alpha''$ כה נאמר

אם n מספיק גדול, אז $d(x'_n, x''_n) < \delta/2$ וזו הנדרש.

$$g(f(x'_n), f(x''_n)) < \varepsilon/2 \quad : \quad |\varphi(\delta)|, \delta/2 - |\varphi|, \wedge |\delta| > \varepsilon \quad \text{for}$$
$$g(f(u'), \bar{f}(u'')) < \varepsilon/2 < \varepsilon \quad \text{p.o.d}$$

אסמיק $\bar{f}$ צור א"ע.