

(1) הצגה: יהי (X, d) מרחב מטרי, ויהי $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty$ אזי $\{x_n\}$ מתכנסת.

21/1/09

אזי $\{x_n\}$ מתכנסת קוסי. כל $\epsilon > 0$ קיי $N(\epsilon)$ המקיים

$$\forall m, n > N(\epsilon) \quad d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

הוכחה: בואו נסדר סדרה קוסי היתה תכונה מטריה של המרחב, ואז

ההוכחה נעשה על ידי הולדנאוורטס.

נבחר $y = \frac{x}{1-x}$, $(0,1) \rightarrow (0,\infty)$ מתקן בהתקן

הסדרה $\{1 - \frac{1}{n}\}$ סדרה קוסי ב- $(0,1)$, אז

קוסי ב- $(0,\infty)$. $1 - \frac{1}{n} \mapsto (1 - \frac{1}{n}) : \frac{1}{n} = n-1$ ו- $\{n-1\}$ איננה סדרה קוסי.

משפט: כל סדרה מתכנסת היתה סדרה קוסי, ואם סדרה קוסי יש

נק' עקום, אזי היא מתכנסת לכל נק' עקום.

הצגה: יהי (X, d) מרחב מטרי. X יקרא מרחב שלם אם כל

סדרה קוסי בו מתכנסת.

הצגה: יהיו (X, d) מרחב מטרי, $A \subseteq X$ נשאל

אם הקוטר של A הוא $\text{diam}(A) := \sup_{x,y \in A} d(x,y)$

משפט: יהי (X, d) מרחב מטרי. אזי X שלם אם כל סדרה

יוצרת של קוסי סגורה היא בקוסי $\sum_{n=1}^{\infty} F_n$ המקימה $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$

המקום $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ מכל נק' אחת ויחידה.

הוכחה: נניח כי המרחב שלם, ויהי F_n סדרה כזו.

נבחר כל $x_n \in F_n$, אזי $\{x_n\}$ סדרה קוסי. אזי $\{x_n\}$ מתכנסת

לנק' a וכל $x_m, x_p \in F_n$, $d(x_m, x_p) \leq \text{diam}(F_n)$, וכל

$\{x_n\}$ סדרה קוסי. X מרחב שלם, ולכן יש סדרה סגורה - (סגורה) a

כל $\{x_m | m \geq n\} \subseteq F_n$, $n=1,2,\dots$ F_n סגורה, ולכן

$a \in F_n$ לכל n . $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$

כל $a, b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ יש $d(a,b) \leq \text{diam}(F_n)$ לכל $n=1,2,\dots$

1 - $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$, ולכן $d(a,b) = 0$, ולכן $a=b$.

נניח כי $\{F_n\}$ סדרה יורדת של תת-קבוצות של X , $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ וכן, $\text{diam}(F_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ כל

אז $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ סדרה קושי (עצמי, דגל). $n=1, 2, \dots$
 $F_n := \{x_m \mid m \geq n\}$

לפי ההנחה $\{F_n\}$ סדרה יורדת של תת-קבוצות של X , וכן

$\text{diam}(F_n) = \sup\{d(x_m, x_k) \mid m, k \geq n\}$ וכן, $\text{diam}(F_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

(כלומר, אין צורך להניח שסדרה יורדת של תת-קבוצות של X , וכן

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה קושי, $\text{diam}(F_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

לפיכך, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$, ולכן נבחר $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$

נניח כי $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

לכן $d(a, x_n) \leq \text{diam}(F_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ $n \in \mathbb{N}$

למה (Baire): יהי (X, d) מרחב מטרי פסי. אז כל

סדרה של תת-קבוצות צפופה ב- X יש חיתוך צפוף ב- X .

הוכחה: תהיה G_n קבוצת פתוחה צפופה ב- X , $n=1, 2, \dots$

אז $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ צפוף, כלומר חתך של קבוצת פתוחה לא ריקה.

אז $U \neq \emptyset$ פתוחה פתוחה.

אז $U \cap G_1 \neq \emptyset$ פתוחה (כי G_1 פתוחה צפופה). ולכן קיים כדור

פתוח B_1 כזה שכל נקודות קרן $n=1$, חתכים $B_1 \subseteq \overline{B_1} \subseteq U \cap G_1$.

אז $B_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ פתוחה, ולכן קיים כדור פתוח B_2

כזה שכל נקודות קרן $n=2$, חתכים $B_2 \subseteq \overline{B_2} \subseteq B_1 \cap G_2$.

באופן דומה נקבע לכל $n=1, 2, \dots$ כדור פתוח B_n כזה שכל נקודות

קרן n , חתכים $B_n \subseteq \overline{B_n} \subseteq B_{n-1} \cap G_n$.

אז $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה יורדת של קבוצות סגורות, חתכים

$a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}$ קיים, $\text{diam}(B_n) \leq 1/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ וכן, $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ וכן

אז $a \in U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ כלומר חתך של קבוצת פתוחה לא ריקה.

2

לפני

Baire

X יקרא

X

X

21/1/09

האיות של כל קבוצה פתוחה וצבועה ב-X, היא צבועה ב-X.

הצגה: (1) כל מרחב קומפקט וקבוע הוא Baire

(2) כל מרחב המאופיין למרחב Baire הוא Baire

הצגה: יהי X מרחב, ויהי $A \subseteq X$ מרחב צבוע (החברה)

של $\text{Int } A = \emptyset$ כל

למה: A צבועה כל $X \setminus A$ צבועה ב-X. כל

$G \neq \emptyset$ פתוח, קיים $\emptyset \neq G \subseteq A$ פתוח כך $A \cap G = \emptyset$

הצגה: יהי X מרחב, ויהי $A \subseteq X$ מרחב צבוע (החברה)

כל A היא איננה בן-מרחב של X צבועה ב-X.

צבועה: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ מרחב צבוע, כי $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\}$ מרחב צבוע

כל $\mathbb{Q}$ איננה צבועה, כי $\text{Int } \mathbb{Q} = \text{Int } \mathbb{R} = \mathbb{R} \neq \emptyset$

הצגה: יהי X מרחב, ויהי $A \subseteq X$ מרחב צבוע (החברה)

כל A היא מרחב צבוע פתוח.

הצגה: יהי X מרחב Baire, ויהי $A \subseteq X$ מרחב צבוע (החברה)

כל $\text{Int } A = \emptyset$

הוכחה: נניח $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ שם A_n מרחב צבוע, $U = \text{Int } A$

כל $n \in \mathbb{N}$ צבועה

כל $U \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$, וכל $n \in \mathbb{N}$ $(X \setminus \overline{A_n}) \subseteq X \setminus U$ מרחב צבוע

כל $n \in \mathbb{N}$, $X \setminus \overline{A_n}$ קבוצה פתוחה וצבועה (כי A_n צבועה), ומכיון

ל-X מרחב Baire, $\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus \overline{A_n})$ צבועה ב-X. כל $X \setminus U$

צבועה ב-X, אז U פתוח, וכל $X \setminus U = X$

כל $U = \emptyset$

הערה: (1) אם X הוא Baire, אזי X הוא מקטגוריה

השנייה (2) $\text{Int} X = X$

(2) במקרה Baire, העצם של כל קבוצה מקטגוריה הראשונה היא מקטגוריה השנייה, כי אחרת - אחרת היא מקטגוריה גבוהה יותר.

טענה: יהי X הוא Baire, והיה $F_n \subseteq X$ סגורה כך ש-

$$\text{Int } F_0 = \emptyset \text{ ואם } X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

[כי אחרת X היה מקטגוריה הראשונה, בסתירה]

הערה: יהי $C_b(\mathbb{R})$ קבוצת הפונקציות הממשליות המוגבלות

$$d(f, g) := \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t) - g(t)|$$

אם $f, g \in C_b(\mathbb{R})$

$C_b(\mathbb{R})$ - המרחב הנורמלי.

טענה: המרחב $C_b(\mathbb{R})$ הוא מקטגוריה הראשונה

ואם לפחות הוא מקטגוריה הראשונה (נקרא מקטגוריה - (1)

הטענה: אם $n \in \mathbb{N}$ נגד:

$$F_n := \{f \in C_b(\mathbb{R}) \mid \exists \xi, |\xi| < n, |h| < 1/n \Rightarrow |f(\xi+h) - f(\xi)| \leq |h|\}$$

היה $f \in C_b(\mathbb{R})$, ואם קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-

אז, אם f שטוחה ב- ξ , אזי קיים סדר עוקבו

$$0 < |h| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} - f'(\xi) \right| < 1$$

$$0 < |h| < \delta \Rightarrow |f(\xi+h) - f(\xi)| \leq |h| (|f'(\xi)| + 1)$$

$$n > \max(|\xi|, 1/\delta, |f'(\xi)| + 1)$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \text{ (כלומר) } \mathbb{D} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

מקטגוריה הראשונה, ואם כך נראה שהכלל נכונה לכל $n \in \mathbb{N}$.
 F_n סגורה.

מאמר

21/1/09 MEN דוג יסודי f -ד נצרכים 2730 $\{f_m\} \subseteq F_n$ ונ

21/1/09

men of 150

$$\neg \mathcal{N}'(A) \wedge |\Sigma_m| \leq n, \quad \Sigma_m \neg \mathcal{N}'(A)$$

$$|h| \leq 1/n \Rightarrow |f_m(\xi_{m+h}) - f_m(\xi_m)| \leq n|h|$$

$\sum_{m_k} \delta_{m_k} \{ \sum_{m_k} \delta_{m_k} \}$ ~~is not a scalar~~ $\{ \sum_{m_k} \delta_{m_k} \} = \delta$

$$|s_k|, |h| \leq 1/n \quad \text{b) d) f) } \quad |\xi| \leq n$$

$$\begin{aligned} |f(\xi+h) - f(\xi)| &\leq |f(\xi+h) - f(\xi_{m_k}+h)| + |f(\xi_{m_k}+h) - f_{m_k}(\xi_{m_k}+h)| \\ &\quad + |f_{m_k}(\xi_{m_k}+h) - f_{m_k}(\xi_{m_k})| + |f_{m_k}(\xi_{m_k}) - f(\xi_{m_k})| \\ &\quad + |f(\xi_{m_k}) - f(\xi)| \leq \\ &\leq 2d(f_{m_k}, f) + n|h| + |f(\xi+h) - f(\xi_{m_k}+h)| + |f(\xi_{m_k}) - f(\xi)| \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 2d(f, f) + n|h| + |f(\xi+h) - f(\xi+h)| + |f(\xi) - f(\xi)| = 0 \\ &= 0 + n|h| + 0 + 0 = n(h) \end{aligned}$$

$$f \in F_n \quad \text{p.d.}, \quad |f(\xi+h) - f(\xi)| \leq n|h| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

$(F_n = \overline{F_n} \Rightarrow \exists F_n \text{ nldb}) \quad \text{Int } F_n = \emptyset \Rightarrow \text{nldb, nld}$

$$B_r(g) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - g| < r\} \quad g \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}) \quad |x|, r > 0$$

קריטריון הולצר'ס עולה $\rightarrow F_n$ של F_n חלש מכל G_n שיהיה G_n פשוט
של G_n הפשוטה (G_n) .

WGS k'n $[-2n, 2n] - \delta$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $h \in C_b(\mathbb{R})$ in

g-δ. בחלק הקטן [a, a+δ] היא עולה - סדוקה, סדוקה, סדוקה, סדוקה

$[-2n, 2n] \rightarrow e^{in\theta} \mapsto g \mapsto h \mapsto d(g, h) < r/2$

1. אלפי ספרים לא הוקדשו לקריאה, רק שהוצגו בחדר
קטן - 1 מ/2.

שבוע הבא $h_4^+(t) = 1$, $[-2\pi, 2\pi] \rightarrow$ פונקציה של t

$$M := \max_{-2h \leq t \leq 2h} (h'_+(t))$$

שם המשפחה: ש. ארזי

$\pi \rightarrow \rho^0 \gamma$

→ $\forall \epsilon > 0, \max_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)| = \frac{\epsilon}{2}$ → $\forall \eta > 0, \varphi \in C_b(\mathbb{R})$ →

$\forall t \in \mathbb{R} \quad |\varphi'_+(t)|, |\varphi'_-(t)| > M + 2\eta$ → 1. φ is not

→ φ is not a function → φ is not a function → φ is not a function

(→ φ is not a function → φ is not a function → φ is not a function)

$$d(g, h+\varphi) \leq d(g, h) + d(h, h+\varphi) < \dots$$

$$< r/2 + r/2 = r \Rightarrow h+\varphi \in B_r(g)$$

→ $t \in [-2\eta, 2\eta]$ → $h+\varphi \notin F_n$ → φ is not

$$|(h+\varphi)'_+(t)| \geq |\varphi'_+(t)| - |h'_+(t)| \geq M + 2\eta - M = 2\eta$$

→ φ is not a function → φ is not a function → φ is not a function

→ φ is not a function → φ is not a function → φ is not a function

→ φ is not a function → φ is not a function → φ is not a function

$$|\varphi'(\xi)| \leq \eta \quad \text{→ } \varphi$$