

(1)

אנליזה

Stone-Čech

14/1/09

הבה: יהי X מרחב טופולוגי, Y מרחב טופולוגי, $f: X \rightarrow Y$

נניח כי f מתמשך ל- $\beta(X)$ (כלומר $f \in C(X, Y)$)

הבה: Y מרחב טופולוגי, $\beta(Y)$ מרחב טופולוגי, $g: \beta(Y) \rightarrow Y$ ההרחבה של f ל- $\beta(Y)$

ההרחבה של f ל- $\beta(Y)$ היא $g: \beta(Y) \rightarrow Y$ כזו ש- $g|_X = f$

כל פונקציה מתמשכת מ- X אל Y היא f (המשולב) של Y ו- $\beta(X)$

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 e \downarrow & & \downarrow g \\
 \beta(X) & \xrightarrow{f^*} & \beta(Y)
 \end{array} \quad (1)$$

כל $g(Y) = \overline{g(X)} = \overline{f(X)}$ כי $g(X) = f(X)$ והוא סגור

המרחב $\beta(Y)$ הוא מרחב טופולוגי, T_0 מרחב טופולוגי, T_2 מרחב טופולוגי

הבה: $f: X \rightarrow Y$ פונקציה, $\varphi: Y \rightarrow [0,1]$ פונקציה

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\varphi} [0,1]$$

הפונקציה $\varphi \circ f: X \rightarrow [0,1]$ היא פונקציה מתמשכת

$$f^* \varphi = \varphi \circ f$$

כל $\varphi \in C(Y, [0,1])$ מתקיים $f^* \varphi \in C(X, [0,1])$

כל $\varphi \in C(Y, [0,1])$ מתקיים $f^* \varphi \in C(X, [0,1])$

$$f^*(\varphi)(x) = (\varphi \circ f)(x) = \varphi(f(x)) = \varphi(x)$$

$$= \varphi(f(x)) \in [0,1]$$

$$f^* \circ e = g \circ f$$

הבה: $g: \beta(Y) \rightarrow Y$ ההרחבה של f ל- $\beta(Y)$

כל $x \in X$ מתקיים $f^*(e(x)) = g(f(x)) = f(x)$

כל $x \in X$ מתקיים $f^*(e(x)) = g(f(x)) = f(x)$

$$f^*(e(x)) = g(f(x)) \in \beta(Y)$$

$$f^*(e(x)) = g(f(x)) \in \beta(Y)$$

$$\bar{f}^*(e(x)) \subseteq \beta(Y) \quad \text{וכן} \\ \bar{f}^*(\beta(x)) = \bar{f}^*(\overline{e(x)}) \subseteq \overline{\bar{f}^*(e(x))} \subseteq \overline{\beta(Y)} = \beta(Y)$$

$$\text{וכן } \bar{f}^* \text{ כי } g^{-1} \circ \bar{f}^*|_{\beta(x)}$$

ולכן, נראה שיש, בהכרח, של פונקציות רצופות.

נראה שיש, בהכרח, שיש פונקציות רצופות (שהן טיפוסיות, לא באמת צריך להראות!)

$$g^{-1}(\bar{f}^*(e(x))) = (g^{-1} \circ \bar{f}^*)(e(x)) \quad : x \in X$$

$$g^{-1}(g(f(x))) = f(x)$$

$$(f \circ e^{-1})(e(x)) = f(e^{-1}(e(x))) = f(x)$$

$$\text{וכן } e(x) \text{ ו- } g^{-1} \circ \bar{f}^* = f \circ e^{-1}$$

יש להוכיח הטענה: יהי $x \in X$ ויהי $\varphi \in \beta(Y)$.

$$(\bar{f}^* \circ e)(x)(\varphi) = \bar{f}^*(e(x))(\varphi) = (e(x) \circ \bar{f})(\varphi) = \\ = e(x)(\bar{f}(\varphi)) = \bar{f}(\varphi)(x) = \varphi(f(x))$$

$$(g \circ f)(x)(\varphi) = g(f(x))(\varphi) = \varphi(f(x))$$

ולכן, הוכחנו את הטענה:

$$T_2 \downarrow \bar{f} : A \rightarrow Y \quad \text{אם } A \subseteq X, \text{ אז } X \text{ היא טופולוגיה, } f : A \rightarrow Y \text{ פונקציה רצופה}$$

$$\bar{f} : \bar{A} \rightarrow Y \text{ פונקציה רצופה, } f : A \rightarrow Y \text{ פונקציה רצופה, } \bar{f} \text{ היא הרחבה של } f$$

יהי $f_1, f_2 : \bar{A} \rightarrow Y$ הרחבות רצופות של f , אז:

$$f_1|_A = f_2|_A = f \quad \text{אם } x \in \bar{A} \text{ אז } x \text{ היא גבול של רצף ב- } A$$

$$f_1(x) = f_2(x) \quad \text{לכן } f_1 = f_2 \text{ על } \bar{A} \text{ ולכן } f_1 = f_2 \text{ על } \bar{A} \text{ ולכן } f_1 = f_2 \text{ על } \bar{A}$$

$$\begin{array}{ccc} Y & \xleftarrow{h} & X \\ & \searrow g & \downarrow \beta(x) \\ & & \beta(x) \end{array}$$

$g \circ \ell = h$ $\hookrightarrow$ h $\in$ $\text{Im } g$, $\forall$ f $\in$ $\text{Im } g$ $g|_{\beta(x)} \rightarrow Y$ $\hookrightarrow$ h $\in$ $\text{Im } g$ $\hookrightarrow$ h $\in$ $\text{Im } g$

$\gamma \in \Gamma$: $\gamma \in \Gamma$, $\text{hoe}^{-1} : e(x) \rightarrow \gamma$

$$\gamma \geq g(\beta(x)) = g(\overline{e(x)}) \geq g(e(x)) = h(x)$$

$$h(x) \text{ , ציגור גרפי } Y \text{ - ערענל , וואס } g(\beta(x))$$

$$Y \supseteq g(\beta(x)) \supseteq \overline{h(x)} = Y \quad \text{پہلے, } Y = \emptyset \text{ کا واسطے}$$

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ \text{011} & \leftarrow & X \\ & \nwarrow & \downarrow e \\ & & B(X) \end{array}$$

צגה: $f: X \rightarrow [0,1]$, $f(x) = \frac{1}{n}$ אם $x = \frac{1}{n}$ ו-0 אחרת.

למשל ק"מ - ההבחנה בצורה יחידה $\beta(x)$ של $e(x) \rightarrow [0,1]$ $f \circ e^{-1}$

הוכחה: [1, 0] קולומבית. הכוללת, וכן גם קולומבית של המערכת.

Goal: X and Y are $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{R}^m$ respectively. (Y, h) is a Hilbert space.

no. 3, $f: X \rightarrow [0, 1]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{N}$ $n \geq 0$, X $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$

עבור כל $\epsilon \in (0, 1)$ קיים $\delta \in (0, 1)$ כזה ש: $f \circ h^{-1}: h(X) \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$

ϵ -הקטן ביותר כך ש- $(\overline{f(x)} = y \text{ ו } x \in S) \cap [0,1] - \delta$

$$\sim 13 \cdot 10^6 \text{ km}^2 (Y_2, h), (Y_2, h) \sim 10^6 \text{ km}^2 (\beta(x), e) - 1 (Y, h)$$

$(\varphi = h_1 \circ h_2^{-1})$, Proposition $\varphi: Y_2 \rightarrow Y_1$ ist $P \cdot P$ ist isomorph Y de

מקרה 2) $g: \beta(x) \rightarrow Y$ ו- p פונקציה על

$\therefore \text{Postorder traversal } g \text{ is } a, b, c, g, e, f, h$

שם נק, צי שחלפה כי היא חתה, כי היא ממרחק קולקט, סמית בולסוץ, ולכן היא שחלפה.

1061. $\beta(x) = 0$ 02/03 $\ell(x)$ $x_1 \neq x_2, x_1, x_2 \in \beta(x)$ 1061

$\text{Min}_p \text{ and } X \rightarrow \{y_1^2\}, \{y_2^1\} \text{ are Min}_p$

$$e(y_x^1) \xrightarrow{\alpha} x_1, \quad e(y_x^2) \xrightarrow{\beta} x_2$$

$f: \beta(X) \rightarrow [0,1] \wedge \beta$ פונקציה רציפה, $\beta(X)$ סגור

$$f(x_1) = 0, \quad f(x_2) = 1 \quad \text{27/28 20'30"}$$

נניח $f \in C(X) \rightarrow [0,1]$, נניח

יחס $\tilde{f}: Y \rightarrow [0,1]$ נגד $f \circ e \circ h^{-1}$ ההסמכה

$$\tilde{f}(g(x_1)) = \lim_{\alpha} \tilde{f}(g(e(y_\alpha^1))) = \lim_{\alpha} \tilde{f}(h(y_\alpha^1)) =$$

$$= \lim_{\alpha} (f(e(h^{-1}(h(y_\alpha^1)))) = \lim_{\alpha} (f(e(y_\alpha^1))) = f(x_1) = 0$$

$$\neq \lim_{\alpha} \tilde{f}(g(x_2)) = f(x_2) = 1$$

הוא

כן $g(x_1) \neq g(x_2)$

משפט 1.1: יהי N סט פתוח ב- $\mathbb{R}^n$, ונניח $\beta(N)$

המשפחה $\beta(N)$ של קבוצות פתוחות ב- N היא

המשפחה $\beta(N)$ היא $\beta(N) = \{U \subseteq N : U \text{ פתוח ב-} N\}$

$$\beta(N) = \overline{N} = \overline{U_1} \cup \overline{V_1}, \quad N = U_1 \cup V_1$$

$$\overline{U_1} \subseteq \overline{U} \quad \text{וכן} \quad U_1 \subseteq U \quad \text{אם} \quad \overline{U_1} = \overline{U}$$

אם

$$f: N \rightarrow [0,1] \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in U_1 \\ 1 & x \in V_1 \end{cases}$$

המשפחה $\beta(N)$ היא $\beta(N) = \{U \subseteq N : U \text{ פתוח ב-} N\}$

$$\tilde{f}|_{U_1} \equiv 0 \quad \tilde{f}|_{V_1} \equiv 1 \quad \text{כאשר} \quad \tilde{f} = f \circ e \circ h^{-1}$$

$$\overline{U_1} = \tilde{f}^{-1}(0), \quad \overline{V_1} = \tilde{f}^{-1}(1)$$

$$\overline{U_1} \cap \overline{V_1} = \emptyset \quad \text{וכן} \quad \overline{U_1} = \overline{U} \quad \text{וכן} \quad \overline{V_1} = \overline{V}$$

משפט 1.2: יהי $\beta(N)$ משפחה של קבוצות פתוחות ב- N