

באשר למרחק שלנו לא קומפקט. נשים לב שיש פה מרחק קומפקט  
 ושל  $\mathbb{R}$  מוספים  $\infty$  ו- $-\infty$  ואם המרחק קומפקט והמרחק  
 $\mathbb{R}$  [וים] (חשוב שמרחק אחר שיהיה  $\mathbb{R}$  מרחק שבו  
 משתנה).

הקדמה:

הי  $X$  מרחק,  $\infty \notin X$  (סמן):  $X^* = X \cup \{\infty\}$

נקודת  $X^*$  אפליקציה:  $\tau$

מרחק  $X^*$  מרחק מרחק אחר -

הוא מרחק  $X$

הוא המרחק  $X^*$  מרחק קומפקט - וסדרה  $X$

משפט:

1. המרחק  $X$  מרחק מרחק אפליקציה  $X^*$

2. האפליקציה  $\tau$  מרחק  $X$  היא האפליקציה  $\tau$  -

3.  $X^*$  קומפקט

4.  $X^*$  הוא  $T_2$  אם  $X$  קומפקט קומפקט -  $T_2$

5.  $X$  הוא  $X^*$  אם  $X$  קומפקט

$X^*$  מרחק - הקומפקטיות  $X$  מרחק  $X$  מרחק  $X$

או

הקומפקטיות  $X$  Alexandrov

הוכחה:

1.  $\emptyset, X^* \in \tau$  - מרחק מרחק

נניח  $B$  -  $\{\theta_2\} \subset \tau$  אם  $B$   $\theta_2 \subset X$  מרחק  $\theta_2$  -

$\cup \theta_2 \subset X$  מרחק -  $\cup \theta_2 \in \tau$

נניח  $B$  -  $\infty \in \theta_2$  ואם  $X^*, \theta_2$  מרחק קומפקט -

סדרה  $X$

(מרחק)

$X^*, \cup \theta_2$

$\downarrow$

1

טופולוגיה

בגמר העבודה טופולוגיה

8/1/09

נאמן את הטופולוגיה שבגזרה ה-ט.

אזי  $\phi, X^* \in \tau$  - למשל סבב.

נניח כי  $\{\theta_\alpha\} \subseteq \tau$  אם כי  $\theta_\alpha \subseteq X$  פהמה אזי

על  $\bigcup \theta_\alpha \subseteq X$  פהמה, ולכן  $\bigcup \theta_\alpha \in \tau$ .

נניח כי  $\infty \in \theta_{\alpha_0}$ , ואז  $X^* \setminus \theta_{\alpha_0}$  היא תת קומפקטית של  $X$  אזי:

$$X^* \setminus \bigcup \theta_\alpha = \bigcap_\alpha (X^* \setminus \theta_\alpha) = (X^* \setminus \theta_{\alpha_0}) \cap \bigcap_{\alpha \neq \alpha_0} (X^* \setminus \theta_\alpha) =$$

$$= (X^* \setminus \theta_{\alpha_0}) \cap \bigcap_{\alpha \neq \alpha_0} (X^* \setminus \theta_\alpha) := S$$

תת קומפקטית של  $X$

תת קומפקטית של  $X$

לכן  $\bigcap_{\alpha \neq \alpha_0} (X \setminus \theta_\alpha)$  קומפקטית ג- $X$ , ולכן  $S$  קומפקטית ג- $X$ , ולכן  $\bigcup \theta_\alpha \in \tau$ .

ההוכחה כי חיתוך סופי של קבוצות ג- $\tau$  הוא ג- $\tau$ .

נכא כי הטופולוגיה היחסית של  $X$  היא הטופולוגיה המקורית:

אם  $\theta \in \tau$ , אז  $\theta \cap X$  פהמה הטופולוגיה המקורית של  $X$

אם  $\theta \subseteq X$  פהמה הטופולוגיה המקורית, אזי  $\theta \in \tau$

נניח כי  $X^*$  קומפקטית: יהי  $\{U_\alpha\}$  כיסוי פהמה של  $X$ .

אזי  $\infty \in U_{\alpha_0}$  עבור סופי  $\alpha_0$ . אזי  $X^* \setminus U_{\alpha_0}$  תת קומפקטית של  $X$ .

פהמה ג- $X$

$$X^* \setminus U_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \neq \alpha_0} (U_\alpha \cap X) \quad \text{ולכן} \quad X^* \setminus U_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \neq \alpha_0} U_\alpha \quad (\text{כי } X^* \setminus U_{\alpha_0} \subseteq X)$$

ולכן קיבלנו כיסוי פהמה של הקבוצה הקומפקטית  $X^* \setminus U_{\alpha_0}$ , ולכן קיי

סופי כיסוי סופי, כלומר קיימים  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \neq \alpha_0$  עקבות:

$$X^* \subseteq \bigcup_{i=0}^n U_{\alpha_i} \quad \text{ולכן} \quad X^* \setminus U_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{i=1}^n (U_{\alpha_i} \cap X)$$

הוכחה ג- $\tau$  סופי כיסוי ג- $\tau$ .

לכאן כ'  $X^*$  האלוטו  $\rho p$   $X$  קומפאקט מקומ'ה האלוטו:

$X \rightarrow X$ ,  $T_2$   $\mu$   $X \subseteq X$  's'ic  $T_2$   $X$   $\mu$

[illegible]

$X \rightarrow$  אפוארמפ  $C$  'ס  $\tau_C \ni X^* \setminus C - 1$ ,  $x \in X^* \setminus C$  'ס  
 $X \rightarrow$  אפוארמפ  $\text{int}C$  'ס  $\text{int}C \in \tau - 1$   $x \in \text{int}C - 1$   
 "x ו-1 x דע צוצאן מלצן פאר,  $\text{int}C \cap X^* \setminus C = \emptyset$  פאלגט  
 $X^*$ -א אפוארמפ אונד אפוארמפ זינע

$X^* \rightarrow \text{סוג } X \text{ 'src', 'target' ו' } p/c \text{ ' } n(c)$   
 $G \text{ - א מילי אסרפ } \text{סוג } \{0\} \notin G \text{ 'src', 'target' ו' } p/c$   
 $X^* \rightarrow \text{סוג } X \text{ (סוג), } X \text{ ו' } n(c)$

2. פונקציה  $f: X \rightarrow Y$  קרויה סורטיבית (surjective) אם לכל  $y \in Y$  קיים  $x \in X$  כזה ש- $f(x) = y$ .  
 כלומר:  $f(X) = Y$ .

3.27  $X$  היא  $G$  אלגברה,  $(Y_1, h_1), (Y_2, h_2)$  מודולים פרימיטיביים  
 $\varphi: Y_1 \xrightarrow{\alpha} Y_2$  מורפיזם פרימיטיבי.  $\varphi$  איז  $\alpha$  מורפיזם פרימיטיבי.  $X$  de  
 $Y \xrightarrow{h_2} Y_2$   $h_2 = \varphi \circ h_1$  פרימיטיבי

השערה: מתאים ה'ס', כל  $\varphi: Y_1 \xrightarrow{\delta_0} Y_2$  כזו, של  $\varphi$  קומפטיביזציה



משפט: אם  $X$  יש קומפקטציה  $T_2$  אז  $X$  רגולרי.   
 הוכחה: נניח כי  $X$  יש קומפקטציה  $(Y, \tau)$ ,  $T_2$ ,  $\tau|_X$ .   
 $h(X)$  הוא הגרעין של הרבה קומפקטציה האולטרא (ולכן נרמל).   
 נגדע  $h(X) \subseteq Y$ , וכן  $h(X)$  רגולרי.   
 אם  $h(X)$  רגולרי, כי הוא האולטרא-רגולרי.  $h(X)$

נניח כי  $X$  רגולרי.  $\mathcal{F}$  משפחה של פונקציות   
 חציבות  $X \rightarrow [0,1]$ .  $\mathcal{F}$  (המון)  $e: X \rightarrow [0,1]^{\mathcal{F}}$ .   
 המאפיינים  $e(x) = (f(x))_{f \in \mathcal{F}} \leftarrow e(x)_f = f(x), f \in \mathcal{F}$ .   
 אז  $e$  הוא אולטרא-רגולרי.  $e(X)$

$[0,1]^{\mathcal{F}}$  קומפקטית כי היא חבויה, ו- $e(X) \subseteq [0,1]^{\mathcal{F}}$  סגורה.   
 אז הרבה קומפקטציה  $(e(X), \tau|_{e(X)})$  קומפקטציה  $T_2$ .   
 (כי היא גרעין של הרבה  $T_2$  של  $[0,1]^{\mathcal{F}}$ ).

יש נקודה קומפקטציה של Stone-Čech של  $X$ .   
 $\beta(X) := \overline{e(X)}$  אולטרא-רגולרי.

משפט: יהי  $A, B$  קבוצות,  $f: A \rightarrow B$ . נגדע  $f^*: [0,1]^B \rightarrow [0,1]^A$ .

$f^* = \lambda \varphi: B \rightarrow [0,1]. \varphi \circ f \in [0,1]^A$ .   
 אז  $f^*$  חציבות.

הוכחה: יהי  $a \in A$ , ונגדע  $p_a: [0,1]^A \rightarrow [0,1]$  ההשגה הקולג'ה.

$p_a = \lambda \varphi: A \rightarrow [0,1]. \varphi(a)$  ההשגה של  $a$ . אז

$p_b = \lambda \varphi: B \rightarrow [0,1]. \varphi(b)$  ההשגה של  $b \in B$ . אז

אז  $p_a \circ f^*: [0,1]^B \rightarrow [0,1]$  חציבות.   
 אם  $\varphi \in [0,1]^B$  אז

$$(p_a \circ f^*)(\varphi) = p_a(\varphi \circ f) = (\varphi \circ f)(a) = \varphi(f(a)) = p_{f(a)}(\varphi)$$

אז  $p_a \circ f^* = p_{f(a)}$    
 אם  $p_a \circ f^* = \lambda \varphi \in [0,1]^B$   $p_{f(a)}(\varphi)$    
 אז  $p_a \circ f^*$  חציבות.  $p_{f(a)}$  חציבות.