

מבואה של המשפט:

יהי X מרחב קומפקטי מקומי, T_2 .
 $\bar{C}$ סגורה של X היא קומפקטית מקומית - דאוסלוקיה חזיתית.

הוכחה:

אנחנו θ סגורה! $x \in \theta$
 קיימת קבוצה סגורה U , $\bar{U}$ קומפקטית - קצרה.

$$x \in U \subset \bar{U} \subset \theta$$

וזהו U סגורה של דאוסלוקיה חזיתית.

! - $\bar{U}$ קומפקטית - קצרה דאוסלוקיה חזיתית.

$\Leftarrow$ מכלול סגורה קומפקטית - דאוסלוקיה חזיתית

חזיתית.

אם θ קומפקטית - מקומית.

7.1.09

הוכחה - $\kappa \leq p$ מהמשפט:

יהי $x \in X$, U סגורה סגורה של x , C סגורה קומפקטית - קצרה (b) (אם X קומפקטית מקומית).

$$W = (U \cup C) \cap U \quad - (no)$$

W סגורה - כחול סגורה.

$x \in W$ - סגורה סגורה של x .

$$W \subset C$$

$\downarrow$

! - C סגורה של $\bar{C}$ קומפקטית - דאוסלוקיה חזיתית.

$\Downarrow$

$$\bar{W} \subset C$$

! - $\bar{W}$ קצרה קומפקטית - קצרה סגורה

של קצרה קומפקטית.

וכמו כן, דאוסלוקיה חזיתית - $\bar{W}$ היא T_2

$\downarrow$

סוגיה

האם סקורה של מרחב קומפקט מקומי היא קומפקט מקומי ואילו לא?

(אין להניח T_2 כמו לעיל אלא רק T_1)

הוכחה:

היא FCX סקורה.

$x \in F$ ק"ח סדרה קומפקט C ו- x .

$$x \in F \cap C \quad \text{— כל}$$

שמיני סדרה x ואילו לא חסיה F .

ומצא $F \cap C$ קומפקט? —

$F \cap C$ סקורה ואילו לא חסיה C , C קומפקט.

$\Downarrow$

$F \cap C$ קומפקט!!

$\Downarrow$

$F \cap C$ סדרה קומפקט ו- $x \in F$.

(לדאילו חסיה)

•

הערה:

אם x קומפקט מקומי, T_2 , $A \subset X$ — $A = F \cap G$ — F סקורה, G סקורה.

A קומפקט מקומי ואילו לא חסיה.

הוכחה:

F ו- G הם קומפקט מקומי.

F מרחב קומפקט מקומי — $F \cap G$ סקורה F — $\Leftarrow$

$A = F \cap G$ קומפקט מקומי.

(מכאן המסקנה)

•

צדע

ה' X קומפאקט, T_2 , $-$ מקומי, $A \subset X$ קומפאקט, $B \subset X$ סגור.
 $A \cap B = \emptyset$

אזי קייט קטנה סתמה V אזי - סגור קומפאקט, המקומי.

$$A \subset V \subset \bar{V} \subset X \setminus B$$

הוכחה

ל' $x \in A \subset X \setminus B$ קייט U_x סתמה, אזי - סגור קומפאקט, המקומי.

$$(X \text{ מקומי-מקומי}) \quad x \in U_x \subset \bar{U}_x \subset X \setminus B$$



$$A \subset \bigcup_{x \in A} U_x$$

לכן נוסד סתמה A וק אבד מנהיגה

מ- נוסד סתמה.

$$x_1, \dots, x_n \in A \quad \text{מקומי-מקומי}$$

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$$

$$V = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \quad (\text{מקומי})$$

$$\bar{V} = \bigcup_{i=1}^n \bar{U}_{x_i} \subset X \setminus B$$

אזי סתמה $\bar{V}$ מקומי-מקומי

הוא קומפאקט

$$A \subset V \subset \bar{V} \subset X \setminus B$$

$$A \subset V \subset \bar{V} \subset X \setminus B$$

הערה

לא מיד אבד זכרונות 2 מקומי-מקומי, T_2 .

אזי זה לא נכונה.



דיוקן (צד) - אופן:

$(u, v) \setminus [0, u] \times [0, v]$ הוא מרחב קומפקטי מקומי - (כך סגור)
 על מרחב קומפקטי, T_1 - אך אינו נרמל.

משפט:

יהי X קומפקטי מקומי, T_2 , $A \subset X$ קומפקטי, $A \subset B$ סגור
 $A \cap B = \emptyset$ - !

קיימת $f: X \rightarrow [0, 1]$ רציפה, המקיימת - $f|_A \equiv 0$ - ! $f|_B \equiv 1$ - !

הוכחה:

מהשפט הקודם יש V פתוחה, $\bar{A} \subset V$ - סגור קומפקטי. $V \cap B = \emptyset$.

$$A \subset V \subset \bar{V} \subset X \setminus B$$

$\bar{V}$ נרמל - כי הוא קומפקטי. T_2 - !
 דטרמיננטה היחס -

$$A \cap (\bar{V} \setminus V) = \emptyset - !$$

↓
סגור

← מהשפט אוריסון: קיימת $g: \bar{V} \rightarrow [0, 1]$ רציפה

המקיימת - $g|_A \equiv 0$ - ! $g|_{\bar{V} \setminus V} \equiv 1$ - !

נבנה $f: X \rightarrow [0, 1]$ רציף:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in \bar{V} \\ 1 & x \in X \setminus \bar{V} \end{cases}$$

זרוע - $f|_A \equiv 0$ - ! $f|_B \equiv 1$ - !

נניח f רציף.

הי $\theta \in [0, 1]$ פתוחה יחסית - $f^{-1}(\theta)$ סגור

מה? - $f^{-1}(\theta)$

↓

151 1 ∈ Θ 151 *

$$f^{-1}(\theta) = g^{-1}(\theta) \subseteq V$$

↓

151 1 ∈ Θ 151 *

||

151 1 ∈ Θ 151 *

||

151 1 ∈ Θ 151 *

151 1 ∈ Θ 151 *

$$f^{-1}(\theta) = (g^{-1}(\theta) \cup (X \setminus \bar{V}))$$

↓

151 1 ∈ Θ 151 *

151 1 ∈ Θ 151 *

151 1 ∈ Θ 151 *

$$g^{-1}(\theta) = \bar{V} \cap u$$

151 1 ∈ Θ 151 *

||

$$f^{-1}(\theta) = (\bar{V} \cap u) \cup (X \setminus \bar{V}) =$$

$$= (\bar{V} \cap u) \cup ((X \setminus \bar{V}) \cap u) \cup (X \setminus \bar{V}) =$$

$$= (X \cap u) \cup (X \setminus \bar{V}) =$$

$$u \cup (X \setminus \bar{V})$$

151 1 ∈ Θ 151 *

151 1 ∈ Θ 151 *

צד 1

יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ שרשרת

אם X_α קומפקטיות $\implies \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ קומפקטית

X_α - כל אחד מהם קומפקטית

הוכחה

$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ קומפקטית $\Leftarrow$

$$P_\alpha: \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \xrightarrow{p_\alpha} X_\alpha \quad (p_\alpha)$$

היא פרויקציה

אם X_α קומפקטיות

(מכאן)

אם $C \subset \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ סגורה קומפקטית

$$x \in \prod_{\alpha \in A} U_\alpha \implies x \in \prod_{\alpha \in A} U_\alpha \subset C$$

אם $U_\alpha = X_\alpha$ אז $C = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$

אם $\beta \neq \alpha_i$ אז $U_\beta = X_\beta$

$$P_\beta(\prod_{\alpha \in A} U_\alpha) = X_\beta \subset P_\beta(C)$$

$$P_\beta(C) \subset X_\beta$$

$\Downarrow$

$$X_\beta = P_\beta(C)$$

$\downarrow$

אם X_β קומפקטית

X_β קומפקטית $\Leftarrow$

$\downarrow$

המשפט

$\Rightarrow$ נניח כי $\{X_\alpha\}$ מקיימת את התנאים:

- $X_\alpha \neq \emptyset$, $\alpha \neq \beta \Rightarrow X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$, $\alpha, \beta \in A$
- X_α קומפקטית

$$(x_\alpha) = x \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \quad \text{אז}$$

1. x היא סדרה קומפקטית - $x \in X_\alpha$

2. $x_\alpha \in X_\alpha$ היא סדרה קומפקטית - $x_\alpha \in X_\alpha$

3. $U_\alpha = X_\alpha$ היא סדרה קומפקטית - $U_\alpha = X_\alpha$

||

4. x היא סדרה קומפקטית - $x \in X_\alpha$

||

5. x היא סדרה קומפקטית - $x \in X_\alpha$

Open : (Baire)

הי X מרחב קומפקטית מקומית, T_2

הי G_n סדרה של מרחב, X סגורה

סגורה וזכורה - X

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n = \emptyset$$

אם x אינו נמצא באף אחד מה G_n אז x אינו נמצא באף אחד מה G_n

אם x אינו נמצא באף אחד מה G_n אז x אינו נמצא באף אחד מה G_n

$$G_n = \mathbb{Q} \cup \{r_n\}$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n = \emptyset$$

הוכחה:

היה u קבוצה פתוחה, לא ריקה.

$$u \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n \right) \neq \emptyset$$

צריך להראות ש-

(הנה באמצעות סדרה קבוצתית)

$$V_0 := u$$

היה V_1 קבוצה פתוחה, לא ריקה, זוג - סגור קומפקטי.

המקרה -

$$\overline{V_1} \subset G_1 \cap V_0$$

↓

אפשר כי ליה ק' פתוחה, לא ריקה.

דאזן אמצעות סדרה פתוחה -

$$V_n \neq \emptyset$$

פתוחה ק' ש-

$$\overline{V_n} \subset G_n \cap V_{n-1}$$

$$\{\overline{V_n}\}_{n=1}^{\infty}$$

סדרה יורדת של ק' סגורה לא ריקה

ולק יש זה יתכן - החיבור הסופי

(עכשיו אל סדרה יורדת של סגורה לא ריקה)

$$\overline{V_1} \subset \overline{V_n} \subset u$$

↓

קומפקטי.

← החיבור של $\overline{V_n}$ לא ריק - כי זהו

קומפקטי, אז יש חבורה סופית של $\overline{V_n}$

של כלל זה חבורה.

||

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n} \neq \emptyset$$

וקרי

יכולים

$$u \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \right) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n} \neq \emptyset$$

באשר למרחב שלנו לא קומפקט. נניח שיש אדם אחד קומפקט
 ושל $\mathbb{R}$ מוסתרים ∞ ו- $-\infty$ ואם המרחב קומפקט והמקומות
 ∞ ו- $-\infty$ (חשוב שמרחב אדם נשנים יהיה ∞ מרחב שבו
 נשנים).

הקדמה:

הי X מני, $\infty \notin X$ (סמן): $X^* = X \cup \{\infty\}$
 נקרא X^* אפליקציה: T
 נקרא X^* מקובל במרחב אדם -
 היא יתן במרחב X .
 היא הנשנים X^* נקרא קומפקט - וסגור X .

משפט:

1. המספרה הנל X^* במרחב - מהווה אפליקציה X^*
 2. האפליקציה היחידה - X היא האפליקציה היחידה -
 3. X^* קומפקט.
 4. X^* הוא T_2 אם X קומפקט קומה - T_2
 5. X נקרא X^* אם איננו קומפקט.

X^* נקרא - הקומפקט פירבה X ∞ נקרא 1.

או

הקומפקט פירבה של Alexandrov

הוכחה:

1. $\emptyset, X^* \in T$ - מניח ב- ∞ נקרא
 נניח $\emptyset$ - $\{\emptyset\} \subset T$ אם $\emptyset \subset X$ במרחב אדם קל -
 $\emptyset \subset X$ במרחב אדם - $\emptyset \in T$
 נניח $\emptyset$ - $\infty \in \emptyset$ ואם $X^*, \emptyset \subset X$ היא קומפקט -
 סגור X (אדם).

$\downarrow$ $X^* \setminus \emptyset$