חודש ינואר 2009

1.1.09

אינטואיציה: $\bigcap\{\bar{S} \mid \bar{S}\in F'\} \neq \emptyset$.

נשים לב לשתי תכונות נוספות של F':

* חיתוך סופי של קב' ב-F' שייך ל-F'. (אחרת נצרף אותו ל-F' וכך תהיה סתירה למקסימליות של F').
* אם $T\subset Y$ חותך את כל הקב' ב-F', אזי $T\in F'$. (שוב, סתירה למקסימליות אם נצרף אותה).

יהי $S\in F'$.

ויהי $\alpha\in A$, $\{\overline{p_\alpha(S)} \mid S\in F'\}$ - זוהי משפחה של קב' סגורות של X_α ↓

<u>המשך</u>

משפחה זו הינה בעלת תכונת החיתוך הסופי. (כי כל משפחה - $\{p_\alpha(S) \mid S\in F'\}$ -קל יותר קטנות, יש את תכונת החיתוך הסופי).

אזי - מכיוון ש- X_α מרחב קומפקטי (לכל $\alpha\in A$).

$$\bigcap_{S\in F'} \overline{p_\alpha(S)} \neq \emptyset$$

נבחר - $x_\alpha \in \bigcap_{S\in F'} \overline{p_\alpha(S)}$ לכל $\alpha\in A$.

ונגדיר $\tilde{\varphi}$ -

$$x = (x_\alpha)_{\alpha\in A}.$$

ו- $x \in \bigcap\{\overline{S} \mid S\in F'\}$!

<u>מדוע?</u>

כלומר, רוצים להוכיח ש- x הוא $\tilde{\varphi}$ סגור של כל קב' מ-F'.

צריך לקחת סביבה כלשהי של x ולהראות כי היא חותכת כל $S\in F'$. מספיק להראות עבור סביבה בסיסית.

אז, תהי - $U=\prod_{\alpha\in A} U_\alpha$ סביבה בסיסית של x.

כלומר - $U_\alpha = X_\alpha$ אם $\alpha\neq\alpha_1,\dots,\alpha_n$

ו- U_{α_i} סביבה של x_{α_i} $1\le i\le n$

יהי $1\le i\le n$, לכל $S\in F'$ - $x_{\alpha_i}\in\overline{p_{\alpha_i}(S)}$.

לכן - $U_{\alpha_i}\cap p_{\alpha_i}(S)\neq\emptyset$ לכל $S\in F'$

כלומר - לכל $S\in F'$.

$$p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})\cap S\neq\emptyset$$

אז לפי הטענה על F', $p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})\in F'$

↓

דס"ג

המשך

ולכן גם -

$$\bigcap_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \in F'$$

אבל זוהי בדיוק הסביבה U של x.

$\Leftarrow$ $U \in F'$ ומכך שהפילטר חיתוכי כל
$S \in F'$.

כדרוש.

תזכורות:

- המרחב $[0,\omega]\times[0,\Omega]$ קומפקטי כי הגורמים קומפקטיים והוא T_2 כי הגורמים הם T_2.

$\Downarrow$

המרחב הזה הוא נורמלי.

- כל קוביה $[0,1]^E$ היא מרחב קומפקטי ו-T_2 (E קב' כלשהי).

$\Leftarrow$ כל קוביה היא מרחב נורמלי.

– ניסוח מחדש של אפיון של מרחב $T_{3\frac{1}{2}}$:

משפט:

יהי X מרחב טופולוגי, הטענות הבאות שקולות:

1. X רגולרי לחלוטין.
2. X הומיאומורפי לת"מ של קוביה.
3. X הומיאומורפי לת"מ של מרחב קומפקטי והאוסדורף.
4. X הומיאומורפי לת"מ של מרחב נורמלי.

טענה:

ת"ק K של $\mathbb{R}^n$ היא קומפקטית $\underset{\Longleftrightarrow}{\text{אמ"מ}}$ היא סגורה וחסומה.

הוכחה:

$\Leftarrow$ אם $E \subset \mathbb{R}^n$ קומפקטית - אז E סגורה כי $\mathbb{R}^n$ מרחב T_2

$\downarrow$

יסוד

המשך

מדוע E חסומה? נתבונן בפונ' -

$x \longrightarrow d_2(0,x)$ עבור $x \in E$

והיא פונ' רציפה.

יש טענה: פונ' ממשית רציפה על מרחב קומפקטי היא חסומה.

הוכחה: התמונה של הפונ' הזו היא קומפקטית ב-$\mathbb{R}$
אם יש קב' קומפקטית - יש לה כיסוי סופי, ולכן חסומה, אם לא חסומה אפשר למצוא כיסוי שאין לו תת כיסוי סופי.

ואז f הזו רציפה ולכן חסומה
ולכן E חסומה בקורד' שהקורד'
זה הסופרימום של המרחק.

$\Longrightarrow$ תרגיל בית.

הגדרה:
מ"ט נקרא קומפקטי מקומית אם לכל נק' יש סביבה קומפקטית.

דוגמאות:
- $\mathbb{R}^n$ קומפקטי מקומית.
- כל מרחב קומפקטי הוא קומפקטי מקומית.
- כל מרחב דיסקרטי הוא קומפקטי מקומית.
- $\mathbb{Q}$ איננו מרחב קומפקטי מקומית. כי כל סביבה של כל נק' לא תהיה קומפקטית. - סביבה של הנק' מכילה חיתוך של קטע פתוח עם $\mathbb{Q}$: כל הרציונליים בקטע הפתוח - ואז בקטע אפשר למצוא סדרה שאין לה נק' גבול שם - סדרה של רציונליים שמתכנסת לנק' גבול אי-רציונלי.

משפט:
יהי X מ"ט T_2.
הטענות הבאות שקולות:

המשך:

א. X קומפקטי מקומית.

ב. לכל $x\in X$ ולכל סביבה U של x, יש סביבה קומפקטית V של x המוכלת ב-U.

ג. לטופולוגיה של X יש בסיס המורכב מקבוצות פתוחות בעלות סגורים קומפקטיים.

הוכחה:

ב $\Leftarrow$ ג

תהי $\mathcal{B}$ משפחת כל הקב' הפתוחות בעלות סגורים קומפקטיים.

תהי Θ קב' פתוחה ו- $x\in\Theta$.

מההנחה, קיימת סביבה קומפקטית V של x כך ש- $x\in V\subset\Theta$.

ובפרט $x\in \mathrm{Int}V\subset V\subset\Theta$.

V סגורה כי היא קב' קומפקטית במרחב T_2

ולכן

$$x\in \mathrm{Int}V\subset\overline{\mathrm{Int}V}\subset V\subset\Theta$$

מכיוון ש-V קומפקטית ו-$\overline{\mathrm{Int}V}$ תת קב' סגורה של קומפקטית - $\overline{\mathrm{Int}V}$ קומפקטית.

$$\Downarrow$$

$\mathrm{Int}V\in\mathcal{B}$ ומצאנו לכל קב' וסביבה שלה קב' מ-$\mathcal{B}$ שביניהם.

$\Longleftarrow$ $\mathcal{B}$ בסיס.

ג $\Leftarrow$ א

טריוויאלי. לכל x ב-X יש סביבה מהבסיס שמכילה אותו, והסגור שלה קומפקטי - ולכן לכל x יש סביבה קומפקטית.

א $\Leftarrow$ ב נוכיח בהמשך.

בס"ד

<u>מסקנה של המשפט:</u>

יהי X מרחב קומפקטי מקומית, T_2.

כל תת פתוחה של X היא קומפקטית מקומית בטופולוגיה היחסית.

<u>הוכחה:</u>

תהי θ פתוחה ! - $x \in \theta$.

קיימת קבוצה פתוחה U, $\bar{U}$ קומפקטית כך ש-

$$x \in U \subset \bar{U} \subset \theta$$

והרי U פתוחה גם בטופולוגיה היחסית

! - $\bar{U}$ קומפקטית גם ביחסית

$\Leftarrow$ מצאנו סביבה קומפקטית של x בטופולוגיה היחסית.

לכן θ קומפקטית מקומית

<u>7.1.09</u>

<u>הוכחת א $\Leftarrow$ ק מהמשפט:</u>

תהי $x \in X$, U סביבה פתוחה של x, C סביבה קומפקטית של x (קיימת כי X קומפקטי מקומית).

נסמן - $W = (\mathrm{Int}\, C) \cap U$

W פתוחה - כחיתוך פתוחות.

$x \in W$ - זוהי סביבה פתוחה של x.

$$W \subset C$$

$\downarrow$

! - C סגורה כי היא תת קומפקטית במרחב T_2

$\Downarrow$

$$\bar{W} \subset C$$

! - $\bar{W}$ קב' קומפקטית בתור תת סגורה של קב' קומפקטית

וכמו כן, דרוש ש- $\bar{W}$ היא T_2

$\downarrow$