

שפטים:

נ"ס הוא קומפקט אמ"מ אם ורק אם קיים γ רציף הממפה את X אל $\mathbb{R}^n$.

(נוסחה יסודית להוכחה) קודם כן אנו רוצים להוכיח שיש לה γ רציף הממפה.

זה מוביל אותנו לקד סקציה וחסומות - אם סדרה γ_n מתכנסת

31.12.08

משפט:

יהי X מרחב דלת דג'ס קן מנייה, האנליזה הזאת שקולות:

א. אם סדרה γ_n יש לה γ רציף.

ב. אם סדרה γ_n יש לה סדרה מתכנסת.

ג. X קומפקט.

הוכחה:

$\bar{X} \Rightarrow \bar{X}$ ידוע לנו דבר מרחב שפ"ס א - האקסיומה ה-1 של המנייה, קל וחיבור פה, שפ"ס א - האקסיומה ה-2 של המנייה.

$\bar{X} \Leftarrow \bar{X}$ מיד, ואנחנו רוצים להוכיח על X .

נוגד להוכיח $\bar{X} \Leftarrow \bar{X}$ (חשד) שכל שפ"ס אקסיומה זכורה שהמרחב X רציף.

ומכאן ש - האקסיומה ה-1 של המנייה.

מה נעקוב כיום שזה נעשה - אקסיומה ה-2.

יהי U כיסוי פתוח של X . המרחב שפ"ס א - האקסיומה ה-2 של המנייה.

לפי אינדוקציה - לקיים γ כיסוי קן מנייה X . $\{U_k\}_{k=1}^\infty$.

נניח דג'ס שאלו $\{U_k\}_{k=1}^\infty$ כל U_k כיסוי פתוח.

לכן - אם $X \setminus \bigcup_{k=1}^n U_k \neq \emptyset$.

נבחר $x_n \in X \setminus \bigcup_{k=1}^n U_k$, $n=1, 2, \dots$.

לסדרה $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ יש לה להא מהנחה, שפ"ס א γ .



$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i^n, \frac{1}{n})$$

לכן אם n אפשר לבחור את המרחק ϵ כך ש

כל נקודות במרחק $\frac{1}{n}$ זהו רדיוס $\frac{1}{n}$

אם הסדרה היא נכונה, אז - הקבוצה -

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_i^n\}_{i=1}^{\infty}$$

לסדרה x

(אם $x \in X$ וזמרחק קטן כל שניה - $\frac{1}{n}$ קטן כזה שיהיה

יש x_i^n כזה שקוורטית - זכירה שיהיה)

ולכן x סבבה.

(כבר אמרנו שסגור):

נניח דוגמה כי עבור n מסוים הסדרה אינה נכונה.

(דוגמה) $x_i^n \in X$

$$X \setminus B(x_i^n, \frac{1}{n}) \neq \emptyset$$

$$x_2^n \in X \setminus B(x_i^n, \frac{1}{n}) \quad (\text{דוגמה})$$

$$x_3^n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^2 B(x_i^n, \frac{1}{n}) \quad (\text{ושוק, ישרה})$$

וכך הלאה...

$$x_k^n \in X \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} B(x_j^n, \frac{1}{n}) \quad (\text{אנחנו סגורים, דוחקים סדרה})$$

$$\{x_k^n\}_{k=1}^{\infty} \text{ יש } \bar{y} \text{ קטן - } y$$

(שים לב!) אם דחינו את n נק' הסדרה - המרחק בין 2 קטן שונה

$$d(x_k^n, x_j^n) > \frac{1}{n} \quad \text{כל הסדרה מאזכרת} \quad \frac{1}{n}$$

$$B(y, \frac{1}{4n}) \text{ - } y \text{ סגור, קטן - } y$$

$$x_k^n, x_l^n \quad k \neq l \quad \text{דוגמה - } (y, y) \text{ קטן}$$

$$d(x_k^n, x_l^n) = d(x_k^n, y) + d(y, x_l^n) \leq \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} = \frac{1}{2n}$$

דוגמה!

משפט:

נניח כי X קומפקטי. f הוא פונקציה רציפה מ- X אל Y חזק, Y סלע. Y קומפקטי.

הוכחה:

יהי U כיסוי סמך של Y .

נבדוק ד - $\{f^{-1}(U) \mid U \in U\}$ - זהו כיסוי סמך של X .

יש אלו - כיסוי סופי. $\{f^{-1}(U_i)\}_{i=1}^n$ $U_i \in U$

- סלע

$$Y = \bigcup_{i=1}^n U_i$$

ולכן Y קומפקטי.

הערה:

הקשר של מרחב אופנדי. קראת קומפקט אם הוא מרחב קומפקטי. דאוסלניקה היחס.

שכח:

הקשר סגורה של מרחב קומפקטי. הוא קומפקטי.

הוכחה:

יהי X קומפקטי. $A \subset X$ סגורה.

גיה U משפחה של קבוצות סמך - X .

- סלע

$$A = \bigcup \{A \cap U \mid U \in U\}$$

זה (ס. ש. אלו כיסוי של X - U זיכר ער $\{X \cup A\}$

מכיוון ש- X קומפקטי. יש אלו - כיסוי סופי.

$$\Leftarrow \text{קראת } \{U_i\}_{i=1}^n \text{ ז - } U \text{ סגורה}$$

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n \{U_i\} \quad (A \text{ סגורה})$$

$\Downarrow$

$$A = \bigcup_{i=1}^n \{A \cap U_i\}$$

ולכן A קומפקטי.

משפט:

$\tilde{A}$ קומפקט - X מרחב האוסצורב הוא סגור.

הוכחה:

יהי X מרחב T_2 ויהי $A \subset X$ קומפקט - $\tilde{A}$ סגור.

נראה ש- $X \setminus A$ פתוח.

יהי $x \in X \setminus A$ (נמצא סביבה של x שבה A אינה נמצאת).

כל $y \in A$ קיימת סביבה פתוחה U_y הכוללת y ו- $x \notin \bar{U}_y$.

$$A \subset \bigcup \{U_y \mid y \in A\}$$

מה כיוסר A ,

A קומפקט - $\{U_y\}$ מכסה את A כיסוי סופי.

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n \{U_{y_i} \mid y_i \in A\} \quad \text{קיימת סביבה פתוחה}$$

$$x \notin \bar{U}_{y_i} \quad \forall i$$

$$V = \bigcup_{i=1}^n U_{y_i} \quad (10)$$

$$\bar{V} = \bigcup_{i=1}^n \bar{U}_{y_i}$$

$\Downarrow$

$$x \in X \setminus \bar{V} \subset X \setminus A$$

$X \setminus A$ פתוח
כי A סגור.

$$W = \bigcup_{i=1}^n U_{y_i} \subset X \setminus V \quad \text{כי } V \text{ סגור}$$

$\Downarrow$

כי V סגור
מכאן $W \subset X \setminus V$

$$\bar{W} \subset X \setminus V \subset X \setminus A$$

$\leftarrow$ נמצא סביבה פתוחה של x שבה A אינה נמצאת.

$$x \in W \subset \bar{W} \subset X \setminus A$$

מבוא:

היה $f: X \rightarrow Y$ פונקציה רציפה מ- X קומפקטי אל Y האוסצילטורי, אזי f היא הומיאומורפיזם.

הוכחה:

נראה ש- f סגורה ומתן מתן ההוכחה.

יהי $A \subset X$ סגורה, אזי A קומפקטי. $\Leftarrow f(A)$ קומפקטי -
 !- Y האוסצילטורי, נק $f(A)$ סגורה.

$\Leftarrow f$ פת' סגורה.

$\Leftarrow$ יהי f רציפה. נק f הומיאומורפיזם.

משפט:

מרחב קומפקטי T_2 הוא נורמלי.

הוכחה:

יהי X קומפקטי, T_2 .

$A, B \subset X$ סגורות, $A \cap B = \emptyset$.

אם הוכח - המשפט תקום, נק $x \in X \setminus A$ יש סביבה פתוחה W_x המקיפה -
 $x \in W_x \subset \bar{W}_x \subset X \setminus A$

דבריו סדור $x \in B \subset X \setminus A$

$$B \subset \bigcup \{W_x : x \in B\}$$

B סגורה ומרחב קומפקטי, נק קומפקטי - זה אומר כי סופי.

קיימת $\{W_{x_i}\}_{i=1}^n$ המקיפה -

$$B \subset \bigcup_{i=1}^n W_{x_i} \subset \bigcup_{i=1}^n \bar{W}_{x_i} \subset X \setminus A$$

אז (נסמן) $V = \bigcup_{i=1}^n W_{x_i}$ פתוחה.

$$B \subset V \subset \bar{V} \subset X \setminus A$$

(סגורה על פתוחה) $\rightarrow$ נק X נורמלי.

משפט (ט.כ.ג.)

$$X_\alpha \text{ קומפקטית} \iff \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \text{ קומפקטית}$$

הוכחה:

$\Leftarrow$ קל, כי אם $\prod X_\alpha$ קומפקטית, אז X_α היא תתמרחק של

ההכלאה הקטנה של $\prod X_\alpha$ וזוהי קומפקטית.

X_α קומפקטית.

$$\Rightarrow \text{נסמן } Y = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \text{ (משפחה סוב-ק) של מרחבים טופולוגיים}$$

אנחנו מוכיחים שמשפחה זו היא קומפקטית.

היה F משפחה של קטעים סגורים ב- Y שאין להם נקודה משותפת.

נבנה למינימום שני קטעים ב- F ש- $F \neq \emptyset$.

היה θ אינדקס ב- $\mathbb{N}$ שמשפחה של קטעים F_θ היא תתמשפחה של F .

אז נגדיר $\theta_1 < \theta_2 < \dots$ (אם צריך) שמשפחה של קטעים

היא $(F_{\theta_i})_{i \in \mathbb{N}}$ (אם צריך).

נסדר θ_i כך שיהיה $F_{\theta_i} \subset F_{\theta_{i+1}}$.

אם נבחר θ_i כך שיהיה $F_{\theta_i} \subset F_{\theta_{i+1}}$ ונראה:

היה $\{F_{\theta_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ שורה של קטעים.

$$g = \bigcup_{\beta \in \mathbb{B}} F_\beta \quad (\text{נסמן})$$

$F \subset g$ קטעים.

נראה ש- g היא תתמשפחה קומפקטית.

נניח כי $\{E_1, E_2, \dots\} \subset g$.

אז $E_i \in F_{\beta_i}$ ו- $\beta_1 < \beta_2 < \dots$.

(כאן נראה) $F_{\beta_1} \subset F_{\beta_2} \subset \dots \subset F_{\beta_n}$

אז $\{E_1, E_2, \dots\} \subset F_{\beta_n}$ ו- F_{β_n} קומפקטית.

