דס"ק

<u>המשך</u>

כע - לקסוף.

** אם X מרחב לינדלוף, כל $A\subset X$ סגורה היא לינדלוף.

יהי $\mathcal{U}$ כיסוי של A אז לכל $u\in\mathcal{U}$ יש V_u פתוחה ב-X, כך ש-

$$A\cap V_u = u\in\mathcal{U}.$$

ולכן - $\{X\setminus A\}\cup\{V_u : u\in\mathcal{U}\}$

כיסוי של X (כי איחוד ה-V_u מכיל את A).

$\Leftarrow$ יש לו תת כיסוי בן מניה,

דהיינו - יש בו תת שמכסות את A,

ויכולות לבוא רק מ-$\{V_u : u\in\mathcal{U}\}$

$\Leftarrow$ יש לכיסוי של A תת כיסוי בן מניה

ל-A.

* בז"ן - הראינו שת"ק סגורה של מרחב אינה לינדלוף, מכאן זה"ע הוא כלל אינו לינדלוף. אחרת היתה סתירה!

25.12.08

<u>הגדרה:</u>

מ"ט X נקרא <u>קומפקטי</u> אם לכל כיסוי פתוח שלו יש תת כיסוי סופי.

- ברור שכל מרחב קומפקטי הוא Lindelöf.

* אנחנו יודעים מחדו"א שכל קב' סגורה וחסומה של $\mathbb{R}$ הינה קומפקטית. (<u>הלמה</u> של היינה-בורל).

* מרחב דיסקרטי הוא קומפקטי <u>אמ"מ</u> הוא סופי.

* ברור שכל מרחב טריוויאלי הוא קומפקטי. - יש לו כיסוי יחיד שצריך לדאוג לו.

* $[0,\alpha]$ כאשר α סודר, הוא קומפקטי.

<u>הוכחה:</u>

יהי $\mathcal{U}$ כיסוי פתוח של $[0,\alpha]$

↓

<u>המשך</u>

נגדיר פונק' לאיסן הדרך: $\varphi: (0,\alpha] \longrightarrow [0,\alpha)$ ע"י:

לכל $0 < \beta \le \alpha$, $0 \le \varphi(\beta) < \beta$

בעל התכונה הבאה:

קיימת $u \in \mathcal{U}$ עבורה -

$(\varphi(\beta), \beta] \subset u$.

למה אפשר להגדיר פונק' כזו?

לכל $\beta \in (0,\alpha]$. יש קב' לכיסוי שמכילה אותה, נסמנה u_β.

הקטעים הפתוחים מהווים בסיס לטופולוגית הסדר.

ולכן קיים γ כך ש-

$$\beta \in (\gamma, \delta) \subset u_\beta$$

בפרט - $(\gamma, \beta] \subset u_\beta$ ולכן אפשר למשל

לקחת - $\varphi(\beta) = \gamma$.

אז אפשר להגדיר את φ כך.

כעת, נגדיר סדרה:

$$\beta_1 = \alpha$$

$$\beta_2 = \varphi(\beta_1)$$

$$\vdots$$

$$\beta_n = \varphi(\beta_{n-1})$$

קיבלנו סדרה יורדת ממש - של סודרים -

$$\beta_n < \dots < \beta_2 < \beta_1$$

והרי קב' הסודרים סדורה היטב - לא יכולה להיות

סדרה אינסופית יורדת!!

$\Longleftarrow$ הסדרה נעצרת - כנראה שבאיזשהו

שלב - $\varphi(\beta_k) = 0$

$\downarrow$

המשך

נסיים -

$$(0,\alpha) = \bigcup_{i=1}^{n-1} (\varphi(\beta_i), \beta_i]$$

והרי:-

$$(0,\alpha] = \bigcup_{i=1}^{n-1} (\varphi(\beta_i), \beta_i] \subset \bigcup_{i=1}^{n-1} U_{\beta_i}$$

אז נוסיף - $U_0 \in \mathcal{U}$ עם $0 \in U_0$.

ובסה"כ קיבלנו תת כיסוי סופי.

כדרוש.

$\Longrightarrow$ $[0,\alpha]$ קומפקטי.

* $\mathbb{R}$ למשל איננו קומפקטי.

אפשר למצוא דוג' כיסוי פתוח בן מניה שאין לו תת כיסוי סופי.

הגדרה:

משפחה F של תת"ק בעלת תכונת החיתוך הסופי, אם החיתוך של כל תת משפחה סופית של F אינו ריק.

משפט:

מ"ט הוא קומפקטי אמ"מ $\Longleftrightarrow$ לכל משפחה של תת"ק סגורות, בעלת תכונת החיתוך הסופי, יש חיתוך לא ריק. (אז החיתוך של כל המשפחה לא ריק)

הוכחה:

ההוכחה מבוססת על כללי דה-מורגן.

$\Longrightarrow$ נניח כי X קומפקטי.

יהי F משפחה של תת"ק סגורות, בעלת תכונת החיתוך הסופי.

נניח בשלילה ש- $\bigcap\{F : F \in \mathcal{F}\} = \emptyset$

$\Leftarrow$

$X = \bigcup\{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$ וזהו כיסוי פתוח.

המשך

מקומפקטיות X יש תת כיסוי סופי.

קיימות- $F_1, \dots, F_n \in E$ כך ש-

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus F_i)$$

$\Longleftarrow$ שוב, מכלל דה מורגן

$$\bigcap_{i=1}^{n} (F_i) = \emptyset$$

סתירה לתכונת החיתוך הסופי של המשפחה F.

$\Longrightarrow$ תרגיל בית:

משפט:

מרחב טופולוגי X קומפקטי $\Longleftrightarrow$ אמ"מ לכל רשת בו יש נק' גבול.

הוכחה:

$\Longrightarrow$ יהי X קומפקטי.

יהי $\{x_d : d \in D\}$ רשת במרחב X, נראה שיש לה נק' גבול.

לכל $d \in D$ נגדיר-

$$A_d = \{x_{d'} : d' \geq d, d' \in D\}$$

משפחת הקב' $\{A_d : d \in D\}$ בעלת תכונת החיתוך הסופי.

(מהיות D קב' מכוונת יש d גדול מ- $d_n, \dots, d_1$ ואז x_d יהיה בחיתוך).

אם משפחה של קב' שאינן דווקא סגורות, אז נתבונן על-

$\{\bar{A}_d : d \in D\}$ שגם לה, כמובן, תכונת החיתוך הסופי.

מכאן, מכיוון ש- X קומפקטי - יש-

$$x \in \bigcap_{d \in D} \bar{A}_d$$

המשך.

מתרגיל 7, שאלה 1 אנחנו יודעים ש- x הנה הוא רק גבול של הרשת.

$\Longleftarrow$ נניח כי לכל רשת ב-X יש נק' גבול.

תהי $\mathcal{A}$ משפחה של תת-קבוצות סגורות של X, בעלת תכונת החיתוך הסופי.

תהי $\underline{B}$ משפחת כל החיתוכים הסופיים של איברים של $\mathcal{A}$.

דבר כמובן: $\mathcal{A} \subseteq \underline{B}$.

נסדר את $\underline{B}$ ע"י הכלה הפוכה.

$B_1 \geq B_2$ אם $B_1 \subset B_2$.

$\underline{B}$ בסדר הזה היא קב' מכוונת, כי אם $B_1, B_2 \in \underline{B}$ אזי $\underline{B} \ni B_1 \cap B_2$! ו- $B_1 \cap B_2 \geq B_1, B_2$.

נבחר $x_B \in B$ לכל $B \in \underline{B}$.

$\{x_B : B \in \underline{B}\}$ היא רשת ולפי הנתון, יש לה נק' גבול: x.

נטען ש-

$$x \in \bigcap \{B : B \in \underline{B}\} \subset \bigcap \{A : A \in \mathcal{A}\}$$

אכן, תהי $B \in \underline{B}$ (רוצה להוכיח ש- $x \in \bar{B} = B$ ו-B סגורה כחיתוך סופי של סגורות)

תהי U סביבה של x, קיימת $B' \in \underline{B}$ כך ש- $B' \geq B$ עבורה $x_{B'} \in U$. אבל בחרנו ש- $x_{B'} \in B'$.

$$\Downarrow$$

$$x_{B'} \in U \cap B' \subset U \cap B$$

$\Longleftarrow$ $x \in \bar{B} = B$ ולכן

$$x \in \bigcap \{B : B \in \underline{B}\}$$

לכן X קומפקטי.

(החיתוך של כל $A \in \mathcal{A}$ לא ריק).

משפט:

מ"ט הוא קומפקטי $\Longleftrightarrow$ אמ"מ לכל רשת קיימת תת רשת המתכנסת לנק' של המרחב.

* (נובע ישירות מהמשפט הקודם כי אם לרשת יש נק' גבול הוכחנו שיש לה תת רשת מתכנסת).

– זה מוכיח לנו מקרה פרטי וחשוב - לכל סדרה יש תת סדרה מתכנסת.

31.12.08

משפט:

יהי X מרחב בעל בסיס בן מניה, הטענות הבאות שקולות:

א. לכל סדרה ב-X יש נק' גבול.

ב. לכל סדרה יש תת סדרה מתכנסת.

ג. X קומפקטי.

הוכחה:

א ⇐ ב: ידוע לנו לכל מרחב שמקיים את האקסיומה ה-I של המניה, קל וחומר פה, שמקיים את האקסיומה ה-II של המניה.

ג ⇐ א: תמיד, ללא שום הנחה על X.

נותר להוכיח א ⇐ ג (חשוב לזכור שמספיק לדרוש שהמרחב לינדלוף ומקיים את האקסיומה ה-I של המניה).

*פה נעבוד כמו שהוא מנוסח - עם האקסיומה ה-II.

יהי U כיסוי פתוח של X. המרחב מקיים את האקסיומה ה-II של המניה, לכן לינדלוף - לכן יש תת כיסוי בן מניה ל-X. $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$.

נניח בשלילה שאין ל-$\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ תת כיסוי סופי.

לכן - לכל n -

$$X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} U_k \neq \emptyset$$

נבחר $x_n \in X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} U_k$, ל- $n=1,2,\dots$.

לסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ יש נק' גבול מההנחה, שנסמנה y