בס"ד

המשך רשימה - שמרחב שמקיים את האקסיומה ה-$II$ הוא מעוצמה קטנה
**או שווה** לעוצמת הרצף - $c$.

24.12.08

**משפט:**

יהי $X$ מ"ט המקיים את האקסיומה השניה של המניה.
אזי לכל כיסוי פתוח של $X$ יש תת כיסוי בן מניה.

**הוכחה:**

יהי $B$ בסיס בן מניה של $X$.

יהי $\mathcal{U}$ כיסוי פתוח של $X$. נסמן $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

לכל $x \in X$ קיימת $U_{\alpha(x)} \in \mathcal{U}$ המקיימת $x \in U_{\alpha(x)}$.
קיימת $V_x$ ב-$B$ המקיימת $x \in V_x \subset U_{\alpha(x)}$.

מתקיים ש-
$$\{V_x \mid x \in X\} \subset B$$
תת אוסף של הבסיס ולכן בן מניה.

כמובן שמתקיים -
$$\bigcup \{V_x : x \in X\} = X$$
כי מספיק לכל $\bar{x}$ יש $V_x$ כזה.

ולכן כיסוי בן-מניה - נסמן כ- $\{W_n : n = 1, \dots\}$
ועבור כל $V_x$ כזו - $W_n$ כזה, יש קב' מהכיסוי שמכילה
אותה.

$\Longleftarrow$ לכל $W_n$ יש $U_n \in \mathcal{U}$ המקיימת $U_n \supset W_n$

! - $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. כנדרש.

**הגדרה:**

מ"ט נקרא מרחב **Lindelöf** אם לכל כיסוי פתוח שלו יש תת
כיסוי בן - מניה.

- לכן כל מרחב שמקיים את האקסיומה ה-$II$ של המניה, הוא מרחב
**Lindelöf**

לכן, ראינו כי האקסיומה ה-II של המניה גוררת את התכונות:

* האקסיומה ה-I של המניה.
* ספרביליות.
* Lindelöf.

יש דוגמאות למרחבים שיש להם את 3 התכונות הנ"ל, אך לא מקיימים את האקסיומה ה-II של המניה:

<u>דוגמא:</u>

$\mathbb{R}_u$. ממשיים שבסיס זה קטעים מהצורה $(a,b]$.

מרחב זה מקיים את 3 התכונות, אך אינו מקיים את האקסיומה ה-II.

נוכיח רק ש-$\mathbb{R}_u$ הוא מרחב Lindelöf:

יהי $\mathcal{U}$ כיסוי פתוח של $\mathbb{R}_u$.

יהי $r\in\mathbb{R}$ ונסמן - $A_r$ = קב' כל המספרים - $x\le r$, כך ש:
הקטע $[x,r]$ מכוסה ע"י תת משפחה
בת-מניה של $\mathcal{U}$.

- ברור ש-$A_r$ לא ריקה -
כי $x=r$ שם.

אפשר אף לומר ש- $A_r$ היא קטע לא מנוון - מדוע?

- קיימת $V_r\in\mathcal{U}$ המקיימת - $r\in V_r$ -

וקיים קטע $(a,b]$ (בסיסי) כך ש- $r\in(a,b]\subset V_r$

- לכן $\left[\frac{a+r}{2},r\right]\subset V_r$ ולכן -

$$\left[\frac{a+r}{2},r\right]\subset A_r$$

לגבי ה- $A_r$ יש לפחות נק' אחת, אז מדוע קטע?

כי ברור שאם $x\in A_r$ , $[x,r]\subset A_r$

ולכן $A_r$ הוא קטע ↓

המשך

נסמן - $\alpha = \inf A_r$,

$\alpha = -\infty$, מדוע?

קיימת סדרה יורדת $\{\alpha_n\}$ ב- $A_r$ המתכנסת ל- $\alpha$.

$\alpha_n \to \alpha$ (מהגדרה של inf).

לכן ברור ש- $\bigcup_{n=1}^{\infty}[\alpha_n, r] \subseteq A_r$

כעת, נניח כי $\alpha > -\infty$. (כלומר $\alpha$ סופי כלשהו)

קיימת $V \in \mathcal{U}$ כך ש- $\alpha \in V$.

קיים $(\beta,\gamma]$ המקיים -

$$\alpha \in (\beta,\gamma] \subset V$$

ברור ש-

$$A_r \subset \underbrace{(\beta,\gamma] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}[\alpha_n, r]}_{} = (\beta, r]$$

אפשר לכסות ע״י תת-משפחה
בת מניה של $\mathcal{U}$ (כמו שקודם)
ו- $V$ שבה!

$$\Downarrow$$

$$(\beta, r] \subset A_r$$

אבל יש פה מספרים שקטנים מ- $\alpha$. למשל $\frac{\alpha+\beta}{2}$
הרי $\alpha > \beta$.

סתירה לכך ש- $\alpha = \inf A_r$.

$$\Downarrow$$

$$\alpha = -\infty$$

כלומר - $A_r = (-\infty, r]$ לכל $r \in \mathbb{R}$.

ואז $A_r$, כמו שראינו, אפשר לכסות
ע״י קב׳ בת מניה של איברים מהכיסוי המקורי - $\mathcal{U}$

$\downarrow$

<u>המשך:</u>

$$A_r = (\alpha, r] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, r]$$

זהו איחוד בן מניה של דברים שמכוסים
ע״י משפחה בת מניה מהכיסוי.

כעת, מספיק לשים לב ש:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (-\infty, k]$$

איחוד של $(-\infty, N)$ כש-N טבעי.

$\Longrightarrow$ $\mathbb{R}_\ell$ הוא Lindelöf.
ואין לו בסיס בן מניה.

<u>דוגמא:</u>

$[0,1]^{\mathbb{R}}$ ספרבילי, לא מקיים את האקסיומה ה-1 של המניה (ולכן גם לא את השניה) והוא Lindelöf.
לא נוכיח כרגע, אבל בהמשך נראה שזהו מרחב קומפקטי - הרי זה קוביה רב מימדי. לכן יש תת כיסוי סופי.

<u>למה</u>

מרחב רגולרי, לינדלוף, הוא נורמלי.

<u>הוכחה:</u>

יהי X מרחב רגולרי, לינדלוף
יהיו A ו-B תתי קב' סגורות, זרות.
לכל נק' ב-A יש סביבה פתוחה אשר הסגור שלה זר ל-B, הודות לרגולריות.

A מוכלת באיחוד משפחת כל הקב' הפתוחות ב-X שסגורן זר ל-B.
(נסמן משפחה זו ב-$\mathcal{U}$.

B מוכלת באיחוד משפחת כל תתי הפתוחות שסגוריהן זרים ל-A.
(נסמן משפחה זו ב-V

<u>המשך</u>

קיבלנו כיסוי פתוח של X. -

$$\{X\setminus(A\cup B)\}\cup U\cup V$$

מכיוון ש- X הוא Lindelöf,

לכיסוי הפתוח הזה של X, יש תת כיסוי בן-מנייה.

⇐ קיימות $\{U_n\}\subset U$ סמורק - $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n$

קיימות $\{V_n\}\subset V$ עמורק - $B\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}V_n$

כעת -

$$U_n' := U_n\setminus\left(\bigcup_{k=1}^{n}\overline{V_k}\right)$$

$$V_n' := V_n\setminus\left(\bigcup_{k=1}^{n}\overline{U_k}\right)$$

ואלו הן קב׳ פתוחות.

$A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n'$ -!

$B\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}V_n'$

$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n'\right)\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}V_n'\right)=\emptyset$ -!

כדרוש!

הפרדנו בין 2 קב׳ סגורות ע״י קב׳ פתוחות המכילות אותן.

<u>טענה</u>

$[0,1]^{\aleph_0}$ הוא מטריזבילי.

<u>הוכחה:</u>

אם $x=\{x_n\}$ ו- $y=\{y_n\}$, אפשר להגדיר מרחק.

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|x_n-y_n|$$

**למה**

כל תת-מרחב של מרחב מטריזבילי, הוא מטריזבילי.

**הוכחה:**

ברור, (צמצום של המטריקה לתת-מרחב.

**משפט: (אוריסון)**

כל מרחב רגולרי בעל בסיס בן מניה הוא מטריזבילי.

**הוכחה:**

יהי $X$ מרחב רגולרי בעל בסיס בן מניה $B$.

ראינו שיש לו בסיס בן מניה, הוא Lindelöf ומהלמה הראשונה, הוא נורמלי.

בפרט - $X$ הוא רגולרי לחלוטין.

[הוכחנו בעבר שאם $X$ רגולרי לחלוטין אז $X$ הומיאומורפי לתת מרחב של הקוביה $[0,1]^F$, כאשר $F$ משפחה של פונק' רציפות מ-$X$ ל-$[0,1]$ - עשירה: לכל $x \in X$ ולכל $A \subset X$ סגורה, $x \notin A$, קיימת $f \in F$ המקיימת $f(x)=0$, $f|_A = 1$.]

אז פה, קיימת משפחה $F$ של פונק' רציפות מ-$X$ ל-$[0,1]$ עשירה, בת מניה. נבנה אותה:

לכל $u,v \in B$ המקיימות $\bar{u} \subseteq V$, נבחר פונק' $f_{(u,v)} : X \to [0,1]$ רציפה, המקיימת:

$$f|_{X \setminus V} \equiv 1 \quad , \quad f|_{\bar{u}} \equiv 0$$

ואז -

$$F = \{ f_{(u,v)} : u,v \in B , \bar{u} \subset v \}$$

$F$ בת מניה, כי $B$ בת מניה וזה מכפלה של איברים מ-$B$.

$F$ הנ"ל עשירה, תהי $A \subset X$ סגורה, $x \notin A$.

קיימת $V \in B$ כך ש- $x \in V \subset X \setminus A$

דס"פ

<u>המשך.</u>

מהרגולריות, קיימת קב' פתוחה $W$ המקיימת:

$x \in W \subset \bar{W} \subset V$.

$\Leftarrow$ קיימת $U \in \mathcal{B}$ כך ש:

$x \in U \subset W$

ולסיכום:

$x \in U \subset \bar{U} \subset W \subset \bar{W} \subset V \subset X \setminus A$

מתקיים $\bar{U} \subset V$ ושניהן בבסיס

אז יש פונק' $f(U,V) \in F$ כך ש:

$f|_{\bar{U}} \equiv 0 \Rightarrow f(x) = 0$

$f|_{X \setminus V} \equiv 1 \Rightarrow f|_A = 1$

כדרוש - הקב' עבירה.

לכן - $X$ הומיאומורפי לתת מרחב של $[0,1]^F \approx [0,1]^{\aleph_0}$

והקובייה הנ"ל מטריזבילית

ומהלמה השלישית, כל תת שלו מטריזבילי.

כדרוש.

■

<u>משפט:</u>

יהי $X$ מ"ט, התנאים הבאים שקולים:

א. $X$ רגולרי ומקיים את האקסיומה השניה של המניה.

ב. $X$ הומיאומורפי לתת של $[0,1]^{\aleph_0}$

ג. $X$ מטריזבילי וספרבילי.

<u>הוכחה:</u>

<u>א $\Rightarrow$ ב</u> - המשפט שכרגע הוכחנו.

המשך

ב $\Leftarrow$ ג.

רצינו להראות ש-$X$ הוא מטריזבילי.

לפי ספרבילי - אמנם ספרביליות לא עוזרת ומ"מ להוכיח! לזכור!

אך כאשר גם מטריזבילי זה בסדר.

מטריזבילי + ספרבילי $\Leftarrow$ מטריזבילי + בסיס בן מניה של המרחב

$\Leftarrow$ ט מ"מ שלו הוא מטריזבילי ולכן בסיס בן מניה

$\Leftarrow$ ט מ"מ הוא מטריזבילי וספרבילי.

ג $\Leftarrow$ א

הוכחנו שמקיים את האקסיומה ה-$II$

ומטרי $\Leftarrow$ נורמלי, וכן כמובן רגולרי.

- מרחב Lindelöf - זה אומר שכל תת מ"מ שלו הוא Lindelöf

ניקח את -

$[0,\omega]\times[0,\Omega)$ - זהו מרחב לינדלוף.

תת מ"מ שלו -

$[0,\omega]\times[0,\Omega)\setminus\{(\omega,\Omega)\}$ לא לינדלוף. כי -

$\{0\}\times[0,\Omega)=\{(0,\alpha):0\leq\alpha<\Omega\}$ מוכלת בו

שהיא תת קבוצה סגורה ונראה שלא לינדלוף.

היא הומיאומורפית ל- $[0,\Omega)$,

$$[0,\Omega)=\bigcup_{\alpha<\Omega}[0,\alpha)$$

כי אם היה ניתן להכין ראיה? בן מניה אז -

$$[0,\beta)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[0,\alpha_n)$$

אז $\beta$ בן מניה סתירה!

בס״ד

<u>המשך</u>

כנ״ל - לינדלוף.

*אם $X$ מרחב לינדלוף, אז כל $A \subset X$ סגורה היא לינדלוף.

יהי $\mathcal{U}$ כיסוי של $A$ אזי לכל $u \in \mathcal{U}$ יש $V_u$ פתוחה ב-$X$, כך ש-

$A \cap V_u = u \in \mathcal{U}$.

ולכן - $\{X \setminus A\} \cup \{V_u : u \in \mathcal{U}\}$

כיסוי של $X$ (כי איחוד ה-$V_u$ מכיל את $A$).

$\Leftarrow$ יש לו תת כיסוי בן מניה,

בפרט - יש בו תת שמכסה את $A$,

ויכולים לבוא רק מ-$\{V_u : u \in \mathcal{U}\}$

$\Leftarrow$ יש לכיסוי של $A$ תת כיסוי בן מניה

ל-$A$.

*בנוסף - הראינו שתת׳ סגורה של מרחב אינה לינדלוף, מכאן שהמרחב הוא כלל אינו לינדלוף. אחרת הייתה סתירה!

<u>25.12.08</u>

<u>הגדרה:</u>

מ״ט $X$ נקרא <u>קומפקטי</u> אם לכל כיסוי פתוח שלו יש תת כיסוי סופי.

- ברור שכל מרחב קומפקטי הוא Lindelöf.

* אנחנו יודעים מחדו״א שכל קטע סגור וחסום של $\mathbb{R}$ הינו קומפקטי. (הלמה של היינה-בורל).

* מרחב דיסקרטי הוא קומפקטי <u>אמ״מ</u> הוא סופי.

* ברור שכל מרחב טריוויאלי הוא קומפקטי. - יש לו כיסוי יחיד שצריך לזמן לו.

* $[0, \alpha]$ כאשר $\alpha$ סודר, הוא קומפקטי.

<u>הוכחה:</u>

יהי $\mathcal{U}$ כיסוי פתוח של $[0, \alpha]$

$\downarrow$