המשך.

3. המקרה, נניח $r_0 = 0$.

נבחר $r'' \in D$ כך ש- $0 < r'' < \varepsilon$

יתקיים - $x_0 \in U(r'')$ בהכרח

ואם $x \in U(r'')$ אזי -

$0 \le f(x) < \varepsilon$.

אזי f אכן רציפה.

נשאר רק לראות איך בונים את אוסף $U(r)$ הנ"ל.

10.12.08

נבנה את אוסף $U(r)$ הנ"ל באינדוקציה:

נבחר $U(0)$ להיות קבוצה פתוחה המקיימת -

$$A \subset U(0) \subset \overline{U(0)} \subset X \setminus B$$

יש קבוצה פתוחה כזו מכיוון שהמרחב X הוא נורמלי.

נניח כי נבחרו המשפחות -

$$F_m = \left\{ U\left(\frac{k}{2^m}\right) : k = 0,1,\dots,2^m \right\} \quad 0 \le m \le n$$

המתאים לדרישות.

נראה כי אפשר לבחור את F_{n+1} המתאים לדרישות.

כלומר צריך לבנות $U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)$ כאשר $k = 0,1,\dots,2^{n+1}$

וצריך לטפל רק במקרים k שהם אי-זוגיים. (כי אם זוגי אז זה

מצמצמים - המונה קטן ונבחר בשלב קודם).

יהי k אי"ז.

אזי - $U\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right)$, $U\left(\frac{k-1}{2^{n+1}}\right)$ נבחרו כבר

<u>המשך</u>

וכן מקיימת את הדרישה 3 -

$$\overline{U\left(\frac{k-1}{2^{n+1}}\right)} \subset U\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right)$$

אם $\frac{k+1}{2^{n+1}} < 1$ כלומר - אם $U\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right) \neq X$ אזי -

ונבחר עבור $U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)$ קב׳ פתוחה המקיימת -

$$\overline{U\left(\frac{k-1}{2^{n+1}}\right)} \subset U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) \subset \overline{U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)} \subset U\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right)$$

אפשר לבחור קב׳ פתוחה כזו
מכיוון שיש לנו קב׳ פתוחה שמכילה סגירה.
אז הודות לנורמליות אפשר להכניס ביניהן קב׳
פתוחה ואת הסגירה שלה.

ואם $k = 2^{n+1}-1$ כלומר - $\frac{k+1}{2^{n+1}} = 1$ אזי -

אז מקיימים - $U\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right) = X$

$$\overline{U\left(\frac{k-1}{2^{n+1}}\right)} \subset X \setminus B$$

ונבחר כ- $U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)$ קב׳ פתוחה המקיימת -

$$\overline{U\left(\frac{k-1}{2^{n+1}}\right)} \subset U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) \subset \overline{U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)} \subset X \setminus B$$

שוב, מהנורמליות - כיון פתוחה וסגירה אפשר לבחור
קב׳ כזו

<u>המשך.</u>

יספק-ף דוגמא את משפחת הק' $U(r)$ הדרושה.

*חשוב לשים לב לשימוש בנורמליות כל הזמן בהוכחה.

<u>הערות:</u>

1. כמובן שלא היינו חייבים להשתמש בקטע $[0,1]$ ויכולנו גם ב- $[\beta,\alpha]$ ואז f מקבל את α על A ואת β על B - כי כל קטע סגור $[\beta,\alpha]$ הומאומורפי ל- $[0,1]$.

2. הפונק' שבנינו מקיימת $f|_A \equiv 0$ - באופן זהותי.
אבל, לא <u>בהכרח</u> - $f^{-1}(0) = A$.
ייתכן שמקבלת את הערך 0 גם מחוץ ל- A.
לפעמים ממש אי אפשר להשיג פונק' רציפה כזו ש- 0 רק על A - עבור קב' נתונה.

<u>הגדרה:</u>
תת קב' של מ"ט נקראת <u>G_δ</u> אם היא חיתוך של משפחה בת מנייה של תת קבוצות פתוחות.
(כ"ל היא משלים של קבוצה F_σ - מההגדרה).

<u>משפט:</u>
יהי X מרחב נורמלי ו- $A \subset X$ סגורה.
קיימת $f: X \to \mathbb{R}$ רציפה, המקיימת $f^{-1}(0) = A$ אמ"מ ($\Longrightarrow$) A היא G_δ.

<u>הוכחה:</u> $\Longleftarrow$
נניח כי קיימת f כזו,
ניתן לכתוב את A כ-:
$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left\{x \in X : |f(x)| < \frac{1}{n}\right\}}_{\text{כל קב' כזו היא פתוחה כי f רציפה - תמונה הפוכה של פתוחה.}}$$
ולכן A G_δ. ⊥

המשך

$\Longrightarrow$ נניח כי A היא G_δ. אז -

$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, U_n פתוחים.

לכן - $A \subset U_n$ לכל $n=1,2,\ldots$.

וזהו מרחב נורמלי - משפט אוריסון קיימת $f_n : X \to [0,1]$

רציפה, המקיימת $f_n|_A \equiv 0$

$f_n|_{X \setminus U_n} \equiv 1$.

נתבונן ב- $f := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n$

הטור מתכנס במ״ש! - f היא רציפה.

ברור ש $A \subset f^{-1}(0)$ ומדוע שוה ממש?

אם $f(x) = 0$; $x \notin A$ אז -

$x \notin U_{n_0}$ עבור n_0 מסוים ולכן -

$$f_{n_0}(x) = 1$$

ולכן לא ייתכן ש-

$$f(x) = 0.$$

כי $f(x) \geq \frac{1}{2^{n_0}}$

$$\Downarrow$$

$$A = f^{-1}(0)$$

כנדרש.

- במרחב נורמלי למשהו, לא כל קבוצה סגורה היא G.

אם $F \subseteq \mathbb{R}$ סגורה ו- $h: F \to \mathbb{R}$ רציפה, אז ידוע שאפשר להרחיב את h לפונק' רציפה על כל $\mathbb{R}$.

כאן צריך להשלים לערכי h על $\mathbb{R} \setminus F$.

$\mathbb{R} \setminus F$ היא קבוצה פתוחה ולכן ניתנת לכתיבה כ:

$$\mathbb{R} \setminus F = \bigcup_n (a_n, b_n)$$

איחוד בן מניה של קטעים פתוחים זרים זה לזה.

וצריך להגדיר את ההרחבה לכל קטע כזה.

h מוגדרת על הקצוות a_n ו- b_n - הן ב- F, ולכן נגדיר לינארית את h כאשר המחבר בין a_n ו- b_n.

(כלומר - בין הערכים של $h(a_n)$ ו- $h(b_n)$)

* אפשר להוכיח ש- h מורחבת כך, רציפה על כל $\mathbb{R}$.

- מסקנה שאפשר להרחיב פונק' ממשית רציפה בכל מרחב נורמלי.

* חשוב שהפונק' F הינה סגורה.

גם על הישר אי אפשר להרחיב במקרים ש- F פתוחה.

<u>למשל:</u> $\frac{1}{x}$ מוגדרת על $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ - פתוחה. ולא ניתן להרחיבה לכל $\mathbb{R}$!

<u>משפט (Tietse):</u>

יהי X T_2, הטענות הבאות שקולות:

א. X נורמלי.

ב. לכל $A \subset X$ סגורה ולכל $f: A \to \mathbb{R}$ רציפה, קיימת הרחבה רציפה $\varphi: X \to \mathbb{R}$. (כלומר - $\varphi|_A = f$).

- יתר על כן, אם f מקיימת $|f(a)| < c$ $\forall a \in A$ עבור $c > 0$, אז אפשר לבחור את φ כך שמקיימת $|\varphi(x)| < c$ $\forall x \in X$.

הוכחה:

ב ⇐ א

צריך להראות שאפשר להפריד בין 2 קב' סגורות, זרות.

יהיו $A_1, A_2 \subset X$ סגורות, זרות.

נגדיר $f: A_1 \cup A_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ באופן הבא:

$$f(a) = \begin{cases} 0 & a \in A_1 \\ 1 & a \in A_2 \end{cases}$$

f הנ"ל רציפה.

אז יש הרחבה רציפה של f לכל X, ונקבל ש-

$$A_1 \subset \{x \in X \mid \varphi^{-1}(x) < \tfrac{1}{2}\}$$

$$A_2 \subset \{x \in X \mid \varphi^{-1}(x) > \tfrac{1}{2}\}$$

שתי הקב' האלה פתוחות, מרציפות φ, וברור שהן זרות ולכן המרחב נורמלי.

א ⇐ ב

נניח: X נורמלי, $A \subset X$ סגורה.

למה

להנחות האלה על X ו-A. (נניח כי קיימת) $g: A \longrightarrow \mathbb{R}$ רציפה, כך $|g(a)| \le c$ לכל $a \in A$ עבור $c > 0$ מסוים.

אז קיימת $h: X \to \mathbb{R}$ רציפה, המקיימת $|h(x)| \le \frac{c}{3}$ $\forall x \in X$

ו- $\forall a \in A \quad |g(a) - h(a)| \le \frac{2c}{3}$

הוכחה:

נסמן -

$$A_1 = \{a \in A \mid g(a) \ge \tfrac{c}{3}\}$$

$$A_2 = \{a \in A \mid g(a) \le -\tfrac{c}{3}\}$$

<u>המשך</u>

אזי קח קב׳ סגורות של X (אולי ריקות, זרות משנה)

נבנה - $h: X \to [-\frac{1}{3}c, \frac{1}{3}c]$ רציפה, המקיימת -

$$h|_{A_1} \equiv \frac{c}{3}$$

$$h|_{A_2} \equiv -\frac{c}{3}$$

פונק׳ אוריסון, רק לא ל- $[0,1]$ אלא לקטע סגור אחר.
יש פונק׳ כמו כי X נורמלי.

אז ברור ש- $\quad |h(x)| \leq \frac{c}{3} \quad \forall x \in X$

ומתקיים גם ש-

$$|g(a) - h(a)| \leq \frac{2c}{3}$$

כי אם $a \in A_1$ אז מחסרים ומקבלים שבדיוק קטן או שווה: $\frac{2c}{3}$
כנ״ל ל- $a \in A_2$

אם $a \in X \setminus A_1 \setminus A_2$ אז:

$$-\frac{1}{3}c < g(a) < \frac{1}{3}c$$

וגם -

$$-\frac{1}{3}c \leq h(a) \leq \frac{1}{3}c$$

$$\Downarrow$$

$$|g(a) - h(a)| \leq \frac{2c}{3} \quad \forall a \in X$$

∎ (למה)

↓

ד.סד

<u>המשך הוכחה – א̄ ⇐ ב̄</u>

מקרה 1. נניח $f: A \to \mathbb{R}$ רציפה, $|f(a)| \le c$, $\forall a \in A$.

תהי h_0 הניתנת ע"י הלמה עבור f הנ"ל.

כלומר $h_0 : X \to \mathbb{R}$ רציפה.

$$\forall x \in X \quad |h_0(x)| \le \frac{c}{3}$$

$$\forall a \in A \quad |f(a) - h_0(a)| \le \frac{2c}{3} \quad !$$

תהי h_1 הפונק' הניתנת ע"י הלמה עבור $\underline{f - h_0}$.

h_1 רציפה.

$$\forall x \in X \ (\tfrac{1}{3} \text{ של המקס}) \quad |h_1(x)| \le \frac{2c}{9}$$

$$\forall a \in A \quad |f(a) - h_0(a) - h_1(a)| \le \left(\frac{2}{3}\right)^2 c \quad !$$

נמשיך כך באינדוקציה.

נניח כי $h_0, h_1, \dots, h_n$ רציפות נבחרו,

והן מקיימות:

$$\forall x \in X \quad |h_i(x)| \le \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^i c$$

$$\forall a \in A \quad |f(a) - h_0(a) - \dots - h_i(a)| \le \left(\frac{2}{3}\right)^{i+1} c$$

עבור $i = 1, \dots, n$

תהי h_{n+1} הפונק' הרציפה הניתנת ע"י הלמה עבור

$$f - h_0 - \dots - h_n$$

h_{n+1} מקיימת:

$$\forall x \in X \quad |h_{n+1}(x)| \le \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} c$$

$$\forall a \in A \quad |f(a) - h_0(a) - \dots - h_{n+1}(a)| \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} c$$

המשך.

אז קיימת סדרה של פונק' רציפות $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ המקיימת את אי השוויונות הדרושים לכל n.

הטור - $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ מתכנס במ"ש על X

$\varphi := \sum_{n=0}^{\infty} h_n$ - פונק' רציפה על X

$$\forall x \in X \quad |\varphi(x)| \le \sum_{n=0}^{\infty} |h_n(x)| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot c = c$$

-!

$$\forall a \in A \qquad |f(a) - \varphi(a)| = 0$$

לכן φ היא ההרחבה הדרושה.

מקרה 2: $|f(a)| < c$, $\forall a \in A$ אז ידוע שקיימת הרחבה רציפה φ_1 - של f, המקיימת $\forall x \in X \quad |\varphi_1(x)| \le c$.

ורוצים ש-φ_1 תהיה ממש חזק.

נסמן: $B := \{x \in X : |\varphi_1(x)| = c\}$ סגורה, וזרה ל-A (כי על A תמיד קטן מ-c)

קיימת פונק' - $\Psi : X \to [0,1]$ רציפה -

$\Psi|_A \equiv 1$, $\Psi|_B \equiv 0$ ממשפט אוריסון

וניקח -

$$\varphi = \Psi \cdot \varphi_1$$

היא מקיימת את הדרישות ורציפה כהרכב פונק' רציפות. (על B מקבל 0 במקום c)

$$\Downarrow$$

$$|\varphi(x)| < c$$

<u>מקרה ב:</u> $f: A \to \mathbb{R}$ לאו דווקא חסומה. רציפה.

נתבונן ב- $\theta(t) = \frac{t}{1+|t|}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

θ היא הומיאומורפיזם של $\mathbb{R}$ על $(-1,1)$

$$\theta \circ f : A \to (-1,1)$$

עפ"י המקרה השני - יש לה הרחבה רציפה - (רציפה חסומה $|\cdot| \le 1$)

$$\psi_1 : X \longrightarrow (-1,1)$$

ואז ההרחבה של f, שדרושה לנו, הוא -

$$\psi: \theta^{-1} \circ \psi_1$$

והיא מקיימת את הדרוש.

<u>משפט:</u>

יהי X מרחב נורמלי, $Y \subset X$.

אזי - Y הוא T_2 ו- Y מקיים את התכונה הבאה -

אם $A \subset Y$ סגורה יחסית ו- $y \in Y \setminus A$, אזי קיימת

$f: Y \longrightarrow [0,1]$ רציפה, המקיימת - $f(y)=1$, $f|_A \equiv 0$

*(זה יותר חזק מזה ש- Y רגולרי)

<u>הוכחה:</u>

A סגורה יחסית.

לכן קיימת $F \subset X$ סגורה, המקיימת - $F \cap Y = A$. ו- $y \notin F$

קיימת פונק' אוריסון לשתי הקבוצות הסגורות F ו- $\{y\}$ - ב- X.

$$\psi: X \longrightarrow [0,1]$$

$$\psi(y)=1 \;,\; \psi|_F \equiv 0$$

↓

המשך

הפונק' הדרושה לנו, הוא: $f := \varphi|_Y$.

הגדרה:

מ"ט X נקרא רגולרי לחלוטין אם הוא T_1 ולכל $A\subset X$ סגורה ! $x\in X\setminus A$ קיימת רציפה $f: X\to[0,1]$ המקיימת $f(x)=1$, $f|_A\equiv 0$.

- מרחב כזה נקרא מרחב טיכונוף.
- מהמשפט - כל תת מרחב של מרחב נורמלי, הוא רגולרי לחלוטין.

דיון מאוחר:

- נורמלי $\Rightarrow$ רגולרי לחלוטין
- רגולרי לחלוטין $\Rightarrow$ רגולרי. (לא הפוך, הדוגמא שקראנו על סוף רצפה ממש - ידועה)

לפעמים קוראים למרחב רגולרי לחלוטין - מרחב $T_{3\frac{1}{2}}$

משפט:

תת מרחב של מרחב רגולרי לחלוטין, הוא רגולרי לחלוטין.

הוכחה:

כמו הוכחת המשפט הקודם.

משפט:

$\prod X_\alpha$ רגולרי לחלוטין $\overset{\text{אמ"מ}}{\Longleftrightarrow}$ כל X_α רגולרי לחלוטין.

הוכחה:

$\Leftarrow$ נניח כי $\prod X_\alpha$ רגולרי לחלוטין.

כל גורם X_{α_0} הומיאומורפי לתת מרחב של המכפלה $\prod X_\alpha$.

והרי כל תת מרחב כזה הוא רגולרי לחלוטין $\Rightarrow$ כל גורם רגולרי לחלוטין.

$\Rightarrow$ נניח כי כל X_α רגולרי לחלוטין.

אז ברור שהמכפלה T_2.

$\downarrow$

לפלט

המשך.

תהי $A \subseteq \prod X_\alpha$ סגורה ותהי

$$x = (x_\alpha) \in \prod X_\alpha \setminus A$$

תהי U פתוחה בסיסית - (איבר בבסיס)

$$x \in U \subset \prod X_\alpha \setminus A$$

והרי - $U = \prod U_\alpha$ כאשר U_α פתוחה ב-X_α, U_α אם $\alpha \neq \alpha_1,\dots,\alpha_n$ (-חוץ ממקס' סופי) כאשר U_α קב' פתוחה.

$x \in U \Leftarrow x_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i}$ לכל $1 \le i \le n$

X_{α_i} רגולרי-לחלוטין לכן קיימת -

$f_i : X_{\alpha_i} \to [0,1]$ רציפה, שמקיימת -

$f_i(x_{\alpha_i}) = 1$ ו- $f_i|_{X_{\alpha_i} \setminus U_{\alpha_i}} \equiv 0$

ל- $i = 1, \dots, n$

נגדיר -

$$f(y) = \min_{1 \le i \le n} f_i(p_{\alpha_i}(y)) \qquad y \in \prod X_\alpha$$

f רציפה, $0 \le f \le 1$

ו- $f(x) = 1$

אם $y \in A$ אזי $y \notin U$

לכן קיים $1 \le i_0 \le n$ עבורו $y_{\alpha_{i_0}} \notin U_{\alpha_{i_0}}$

אזי - $f_{i_0}(y_{\alpha_{i_0}}) = 0$

ואזי $f(y) = 0$

אז f מפרידה כנדרש.

ולכן המרחב רגולרי לחלוטין.