בס"ד

כאן תמונה על פונק' רציפה וסגורה.

משפט:

תמונה רציפה וסגורה של מרחב נורמלי היא נורמלית.

מסקנה:

יהי X נורמלי ו- $A\subset X$ סגורה. אזי X/A נורמלי.

הוכחה:

ידוע ש- X/A T_2.

נתבונן בהעתקת המנה: $p: X \longrightarrow X/A$

די להוכיח ש- p סגורה ואז מהמשפט זה ינבע.

תהי $B\subset X$ סגורה

א. אם $B\cap A=\emptyset$ אזי $p^{-1}(p(B))=B$ ולכן $p(B)$ סגורה.

ב. אם $B\cap A\neq\emptyset$ אזי $p^{-1}(p(B)) = A\cap B$ ולכן גם במקרה זה $p(B)$ סגורה.

$\Leftarrow$ p סגורה.

4.12.08

הוכחת המשפט: תהי $f: X\to Y$ על Y.

ראשית, Y הוא T_1.

כי ניקח $y\in Y$, אז קיימת $x\in X$ עבורה $f(x)=y$

אזי $f(\{x\}) = f(\{y\})$

$\{x\}$ סגורה ב-X ולכן (מהיות f פונק' סגורה)

$\{y\}$ סגורה ב- Y.

ולכן Y הוא T_1. (מקריטריון שקול)

כעת, יהיו $A,B\subset Y$ סגורות, זרות.

$f^{-1}(A)$ ו- $f^{-1}(B)$ סגורות וזרות ב- X (f רציפה).

קיימות V,U פתוחות, $U\supset f^{-1}(A)$

$V\supset f^{-1}(B)$

כי X נורמלי.

$U\cap V=\emptyset$

$\downarrow$

<u>המשך.</u>

$X \setminus U$ ו- $X \setminus V$ סגורות ב-X ולכן $f(X\setminus U)$ ו- $f(X \setminus V)$ סגורות ב-Y.

נרצה הרי להתבונן על המשלימים של אלה ב-Y, ולטעון שהם זרים.
נשים לב (נטען) כי -

$$f(X\setminus U)\cup f(X\setminus V)=$$

$$=f((X\setminus U)\cup(X\setminus V))=$$

$$=f(X\setminus(U\cap V))\underset{U\cap V=\emptyset}{=}f(X)=Y$$

$\Longleftarrow$ $Y\setminus f(X\setminus U)$ ו- $Y\setminus f(X\setminus V)$ פתוחות זרות.

וכן:

$(X\setminus U)\cap f^{-1}(A)=\emptyset$ ולכן -

$$A\cap f(X\setminus U)=\emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$A\subset Y\setminus f(X\setminus U)$$

ובאותו אופן -

$$B\subset Y\setminus f(X\setminus V)$$

אז קיבלנו הפרדה כרצוי.

Y נורמלי.

- גם מ"ט יש לפעמים מחלקה אותה של פונק' ממשיות רציפות - למשל - הפונק' הקבועות.

האם אפשר לומר יותר מזה על מ"ט כלשהם?

מסתבר שבזה תלוי דרישות ההפרדה.

- קיים מרחב רגולרי עליו כל פונק' ממשית רציפה, היא קבועה. ז"א אין פונק' ממשיות רציפות אחרות.

דוגמא מסובכת נמצאת ב-

American Mathematical Monthly -

א. כרך 76 (1969) עמ' 181-182

+ ובגליון של January 1971 עמ' 52-53

- בספר של Dugundji - עמ' 154

המרחב שם אינו רגולרי אז זה יותר חלש.

⇐ צריך מרחב נורמלי כדי שיהיו תמיד פונק' רציפות שאינן קבועות.

כשהמרחב נורמלי יש הרבה פונק' ממשיות רציפות

<u>משפט אוריסון</u> (Urysohn).

יהי X מרחב T_2, הטענות הבאות שקולות:

1. X נורמלי.
2. לכל שתי קבוצות סגורות זרות - A ו- B, קיימת $f:X\to[0,1]$ רציפה המקיימת:

$$A \subset f^{-1}(0)$$
$$B \subset f^{-1}(1)$$

<u>הוכחה:</u>

<u>$2 \Rightarrow 1$</u>

נניח כי A, B סגורות זרות.

קיימת f כנ"ל, נקרא פונק' אוריסון (לא יחידה)

ו $A \subset f^{-1}([0,\frac{1}{2}))$ ו $B \subset f^{-1}((\frac{1}{2},1])$

בס"ד

המשך.

והרי $[0,\frac{1}{2})$ ו- $(\frac{1}{2},1]$

פתוחות וזרות.

ולכן גם התמונות ההפוכות שלהם (מרציפות f)

$\Leftarrow$ המרחב X נורמלי.

$1 \Rightarrow 2$.

נסמן - $D := \left\{ \frac{k}{2^n} : k=0,1,2,\dots,2^n \ , \ n=0,1,2,3,\dots \right\}$

לכל $r\in D$ נתאים - $U(r)\subset X$ פתוחה כך שיתקיים -

א. $U(1)=X$

ב. אם $0\le r<1$ אזי -

$$A\subset U(r)\subset \overline{U(r)}\subset X\setminus B$$

ג. אם $r'>r$ אזי - $U(r')\supseteq \overline{U(r)}$.

נניח שאנחנו מסוגלים לבנות $U(r)$ כנ"ל.

מגדירים - ל- $x\in X$ -

$$f(x) := \inf\{ r\in D : x\in U(r)\}$$

הקבוצה הזו אף פעם לא ריקה כי - $U(1)=X$

לכן ה-inf תמיד קיים.

ברור ש- $0\le f(x)\le 1$ כי $D\subset[0,1]$.

אם $x\in A$ אז לפי תכונה ב, x נמצא

בכל $U(r)$ $\Leftarrow$

$f(x)=0$.

אם $x\in B$ אז שוב מתכונה ב, x נמצא רק

ב- $U(1)$ $\Leftarrow$ $f(x)=1$

המשך.

נשאר להוכיח ש- f שהנ"ל רציפה:

תהי $x_0 \in X$ ויהי $\varepsilon > 0$.

נסמן- $r_0 = f(x_0)$ (r_0 כ- inf לאו דווקא ב- D.)

נחלק למקרים-

א. $0 < r_0 < 1$. נבחר מספרים $r', r'' \in D$ המקיימים-

$$r_0 - \varepsilon < r' < r_0 < r'' < r_0 + \varepsilon$$

(זה אפשרי כי D צפופה ב- $[0,1]$.)

מתקיים, לכן, לפי תכונה ג' ש:

$$\overline{U(r')} \subset U(r'')$$

נסמן-

$$V = U(r'') \setminus \overline{U(r')}$$

$V = U(r'') \cap (X \setminus \overline{U(r')})$ פתוחה כחיתוך של פתוחות.

* ברור ש: $x_0 \in U(r'')$ כי קיים $r_1 \in D$

עבורו- $x_0 \in U(r_1)$ ו $r_0 \le r_1 < r''$

$\Downarrow$

$$x_0 \in U(r_1) \subset \overline{U(r_1)} \subset U(r'')$$

* אבל- $x_0 \notin \overline{U(r')}$ כי אם $x_0 \in \overline{U(r')}$

אז עבור כל $r \in D$, $r' \le r < r_0$

מתקיים ש- $x_0 \in U(r)$. ולכן-

$r_0 = f(x_0) \le r'$

סתירה!

$\Leftarrow$ בסה"כ- $x_0 \in V$

$\downarrow$

<u>המשך.</u>

הקב' הפתוחה הנ"ל, V, היא סביבה של x_0.

$\Downarrow$ ואז -

$$r_0 - \varepsilon < f(x) < r_0 + \varepsilon$$

וזה אכן נכון כי $x \in U(r'')$

$\Downarrow$

$$f(x) = r'' < r_0 + \varepsilon$$

ואם $x_0 \notin \overline{U(r')}$ אז $x_0 \notin U(r)$ לכל $r' \geq r \in D$.

$\Downarrow$

$$r - \varepsilon < r' < f(x)$$

ובסה"כ -

$$r_0 - \varepsilon < f(x) < r_0 + \varepsilon$$

כנדרש.

2. $r_0 = 1$ (לא לוקח x_0 איבר ב- B)

נבחר $r' \in D$ המקיים -

$$1 - \varepsilon < r' < 1$$

$V = X \setminus \overline{U(r')}$ פתוחה

וקל לראות ש-

$x_0 \in V$ וכמו כן -

אם $x \in V$ אז -

$$1 - \varepsilon < f(x) \leq 1$$

$\Downarrow$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$\perp$

המשך.

3. המקרה, לבסוף $r_0 = 0$.

נבחר $r'' \in D$ כך ש- $0 < r'' < \varepsilon$

יתקיים - $x_0 \in U(r'')$ בהכרח

ואם $x \in U(r'')$ אזי -

$0 \le f(x) < \varepsilon$.

אזי f אכן רציפה.

נשאר רק לראות איך בונים את ק׳ $U(r)$ הנ״ל.

10.12.08

נבנה את הק׳ $U(r)$ הנ״ל באינדוקציה:

נבחר $U(0)$ להיות קבוצה פתוחה המקיימת -

$$A \subset U(0) \subset \overline{U(0)} \subset X \setminus B$$

יש ק׳ פתוחה כזו מכיוון שהמרחב X הוא נורמלי.

נניח כי נבחרו המשפחות -

$$F_m = \left\{ U\left(\frac{k}{2^m}\right) : k = 0,1,\dots 2^m \right\} \quad 0 \le m \le n$$

המתאים לדרישות.

נראה כי אפשר לבחור את F_{n+1} המתאים לדרישות.

צ״ל איך לבנות $U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)$ כאשר $k = 0,1,\dots,2^{n+1}$

ואיך לטפל רק בהם k שהם אי-זוגיים. (כי אם זוגי אז זה מצומצם - המונה קטן וכבר בחרנו קודם)

יהי k אז׳.

אזי - $U\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right)$, $U\left(\frac{k-1}{2^{n+1}}\right)$ נבחרו כבר