

טופולוגיהאלדו אלר  
סרטיזר 124/304ספרים:

- \* J. L. Kelly - General Topology
- \* J. Dugundji - Topology
- \* J. R. Munkres - Topology
- \* דניאל איזרלי - טופולוגיה קולורדו
- \* V. V. Prasolov - Intuitive Topology
- \* A. T. Fomenko - Visual geometry and Topology
- \* Engelking - Foundations of General Topology

דקורס - ט קדוצה יהיה לא ריקה.

 $X$  קדוצה, מטחה  $\tau$  על  $X$  נקרא טופולוגיה על  $X$  אם:

1.  $\emptyset, X \in \tau$ .
2. איחוד כל משפחה של קדוצות מ- $\tau$ , הוא קדוצה ששייך ל- $\tau$ .
3. חיתוך סופי של קדוצות מ- $\tau$  שייך ל- $\tau$ .

הזוג  $(X, \tau)$  נקרא מרחב טופולוגיה.דוגמאות:

1.  $X$  קדוצה פרימיטיבית: נקח  $\tau = \{\emptyset, X\}$ . זוהי הטופולוגיה הטריוויאלית על  $X$ .
2.  $X$  קדוצה,  $\tau$  משפחה פתוחה של  $X$  -  $\tau = 2^X$ . קראו טופולוגיה דיסקרטית על  $X$ .
- \* האינדוקסיון של  $\tau$  יקראו הקדוצות הפתוחות של הטופולוגיה.

מהדוגמאות הוא ש לכל קי  $X$  יש לפחות 2 סופוליות, למי.

3.  $X = \{0, 1\}$  .  $\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$  .

המרחב הסופלי, הנקרא המרחב של Sierpinski.

4.  $X = \mathbb{R}$  . הסופוליות  $\tau$  היא אוסף של הקי הממחל לפי הקצרה.

(יך של  $\mathbb{R}$  ממחה  $\mathcal{A}$  וז  $a \in A$  קים קצ ממח  $I$  המקיים  $(a \in I \subset A)$  .

ל קי כמ היא איחוד של קצים ממחים (איחוד סופי) / ק ממח של קצים ממחים זרים  $\{I_\alpha\}$  .

5.  $X = \mathbb{R}^n$  . הסופוליות  $\tau$  היא אוסף הקי הממחל הנלמ.

הסופוליות הנקרא הסופוליות האוקלידית.

6.  $X$  קדוצה וזה  $d$  פוקצה -

המקיים  $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$

1.  $d(x, y) \geq 0$   $\iff$   $x = y$

2.  $d(x, y) = d(y, x)$  או  $x, y \in X$  - סימטריה

3.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  - אי שוויון ה- $\Delta$ .

פוף כנל נקרא מטרקה / מרחק.

המל  $(X, d)$  נקרא מרחב מטרי.

ל מטרקה מטריה - סופוליות - היא הסופוליות המוסדרת / המוקצרת ע"י המטרקה -

הקצרה:

כדי ממח  $B(x, r)$   $X$  - קי, מידר כ -

$B(x, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$

המשפט

אם  $\mathcal{B}$  קולקציה ספירתית של  $\mathcal{B}$  - קבוצה ספירה היא איחוד של קבוצות ספירות.  
 נא - האפליקציה היא אפליקציה של הקבוצה הספירה הנ"ל. (= משפט של האפליקציה של  
 קבוצות ספירות). (קבוצה של  $\mathcal{B}$  היא איחוד של קבוצות ספירות).

(קבוצה של  $\mathcal{B}$  היא איחוד של  $\mathcal{B}$  - קבוצה ספירה היא איחוד של קבוצות ספירות).

\*  $X$  היא ספירה. כי סדר של  $X$  (קבוצה ספירה קטנה)...

\* כל איחוד של קבוצות ספירות הוא איחוד של קבוצות ספירות.

של קבוצות ספירות...

\* חיתוך סופי של קבוצות ספירות הוא איחוד של קבוצות ספירות.

ספירות. נכח כי איחוד סופי של קבוצות ספירות הוא איחוד של קבוצות ספירות.

כל קבוצה ספירה היא איחוד של קבוצות ספירות.

$$\bigcup_{\beta \in B} B(y_\beta, p_\beta), \quad \bigcup_{\alpha \in A} B(x_\alpha, r_\alpha)$$

(180) כי -

$$\left( \bigcup_{\beta \in B} B(y_\beta, p_\beta) \right) \cap \left( \bigcup_{\alpha \in A} B(x_\alpha, r_\alpha) \right) = \bigcup_{\substack{\alpha \in A \\ \beta \in B}} (B(y_\beta, p_\beta) \cap B(x_\alpha, r_\alpha))$$

מדיסטריקציה של החיתוך.

וכן דבר נוסף, כי -

$$B(y_\beta, p_\beta) \cap B(x_\alpha, r_\alpha) \text{ הוא איחוד של קבוצות ספירות.}$$

(ייתכן כמובן שהחיתוך הוא איחוד של קבוצות ספירות).

$$d(z, y) < p \quad \text{ומכאן} \quad d(z, x) < r$$

אם יהי -

$$0 < s < \min \{ p - d(z, y), r - d(z, x) \}$$

$$\downarrow \quad B(z, s) \subset B(y, p) \cap B(x, r) \quad \text{אם}$$

המשפ.

מכיון שזה זהירות (כנ"ל) (ההבהרה).

נניח  $w \in B(z, s)$  (נניח), האם  $w \in B(x, r)$  ? (וכן נניח)

המשפ.

$$d(x, w) \leq d(x, z) + d(z, w) < d(x, z) + r - d(x, z) = r$$

$\Downarrow$

$$w \in B(x, r)$$

$$w \in B(y, p) \quad \text{וכאשר } p > 0$$

$\Downarrow$

$$B(z, s) \subset B(x, r) \cap B(y, p)$$

$\Leftarrow$  החיבור כלול הוא איחוד של כדורים סגורים.

ואם אה. סופולית.

צורתית נקודה סופולית על מרחב מטר.

דוגמאות של מטריקות ומרחבים מטריים:

1.  $X$  קבוצה.

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x=y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

היא מטריקה.

$$B(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$$

כלומר נקח איחוד של כדורים סגורים.

נקרא אוסף נק' - שפה של  $X$ .

ואספולית היא נק' אספולית - כי נוסף על 2.

2.  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi$  היא וקטור מהצורה  $(x_1, \dots, x_n)$

$\downarrow$

המשפ.

$$d(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

מהמטריקה הזו נקרא את הסופרמיקום האוקלידי - כי קרוב ממש מוקד -  
נרמל עם נדירות.

אפשר גם אוקלידי.

$$d_\infty(x, y) = \max \{ |x_i - y_i| \mid i=1, \dots, n \}$$

לפי זה מטריקה, שה קרוב ממש יבוא עם ריבועים.

אולי יש פה קצת יותר סופרמיקום (מקורם - הסופרמיקום האוקלידי -  
כי כל ריבוע נסה הוא איחוד של נדירות במרחב. אז שני הסופרמיקום  
הוקדמו. (לפי שני קודם איחוד של ריבועים במרחב נראה).

מטריקה נוספת - לפי היא מרחב אוקלידי.

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

(לפי הפעם קרוב ממש גיוון, כי ריבוע, אך אלגוריתם זהו המקדמים ולגורם).

3.  $S$  קבוצה.  $M(S)$  קרוב לפי הפונקציה המסומנת  $S$  -  $f$  -  $N$ .

נבחר מטריקה על המרחב  $M(S)$ .

אם  $f, g \in M(S)$

$$d(f, g) = \sup_{s \in S} |f(s) - g(s)|$$

(למקרה זה של מטריקה).

לפי שני סופרמיקום מוקד - כי מטריקה.

נדון - אם נקח לפי קרוב זה -  $2$  -  $\varphi$  אפוא, עם הסופרמיקום האוקלידי.

אין אלו מטריקה על הקרוב שמקדמה סופרמיקום זו.

מדוע? נניח כי יש  $2$  -  $\varphi$  שניהם  $X$  -  $x_1, x_2$ .

המשפ.

ב מטריקה על  $X$  נגזר סופלקה שהיא זא הטריויאלית.

כ ב מטריקה נגזר אישית  $d(x, y)$  עזורן.

ואם אם נסמן  $(x, y) = r$  נקזר

$$B(x, \frac{r}{2}) - \text{הקז הטז למטריקה כ}$$

וא נמכו סה, וזה לא כל  $X$  כ.א.

לא נמכו  $\leq$  זה קז פמחה ואפלקה

המטרי - אף לא קז פמחה ואפלקה

הטריויאלית (שמכזה רק י -  $\phi$  -  $X$ ).

הקזרה:

יהי  $X$  מוחז,  $\tau_1, \tau_2$  שט סופולקט על  $X$ .

אם  $\tau_2 \subset \tau_1$  אומרים ש  $\tau_2$  יותר עדינה מ  $\tau_1$ .

דבור שזל ב קז האפלקה נדיסקרטט היא העדינה יותר, והאפלקה הטריויאלית היא הכי פחה עדינה.

(משפט):

יהי  $X$  קוזנה ויש שפחה של סופולקט  $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in A}$ .

החיתוך האפלקט  $\bigcap_{\alpha \in A} \tau_\alpha$  זס הוא סופולקט.

(ב נדרש מנקמה).

\* יהי  $(X, \tau)$  מוחז סופולקט.

$\tau \subset \beta$  נקרא דסס של  $\tau$  אם ב קז של  $\tau$  הוא איחוד של קז ד-ב.

דוגמאות:

1. אם  $(X, \tau)$  מוחז אפ,  $\tau$  דעלמה דסיס...

2.  $X$  מוחז דיסקרטט - קז הסטלטינים היא דסיס - שפחה ב  $\tau$  דעלמה.

פ. 1.

\* נשים זד - אספולוגיה פשה יבואים אחת כמה זמנים שנים.

3. דמיון מחר - דמים הוא משפת ב הנדוים המזרחים. (כי אחרים ארם ונרים את האספולוגיה).

4. ד -  $\mathbb{R}^n$  יש דמים קן מנה אספולוגיה האולקאציה. (אוקחים דדורים שמרכיבים דף של הקואורדינטה שלהן דנולווי, והדדים ממו דנולווי - זה דמים קן מנה).

### משפט:

יהי  $(X, \tau)$  מרחב אפלי. וזה  $\tau \subset \mathcal{B}$ . האעני הדוא שקול:

1.  $\mathcal{B}$  דמים אספולוגיה.

2. זה קדוצה במחה -  $\tau \in \mathcal{B}$  אם  $\varphi \in \mathcal{B}$  -  $\tau \in \mathcal{B}$ , קיינה קדוצה

$\mathcal{U}_x \in \mathcal{B}$  דלא הגבנה  $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{B}$ .

### הוכחה:

✓ מילד דה.

\* הוא נוסף - דעזר - המשפט הזה אלוכית את 4 - שאם הנדורים עם המרכבים והנדורים הנולווייה הם דמים קן מנה. ✓

### משפט:

מהי  $X$  קדוצה,  $\Sigma$  משפחה של  $\varphi \in X$  ( $\Sigma \neq \emptyset$ ).

קיינה אספולוגיה קטנה דויד קן ב האם א  $X$  המכיל את  $\Sigma$  וקרא זה -

$\tau(\Sigma)$ . [דמיון אחר האספולוגיה הדיסקרטי - מנה אמה].

דמים של  $\tau(\Sigma)$  הוא משפת ב החימים האספולוגיה של קד מ -  $\Sigma$ .

\* חישב ב האספולוגיה המכיל את  $\Sigma$  היא  $\tau(\Sigma)$ .

דבור שחית הוא האספולוגיה הקטנה דויד שגיל מ  $\Sigma$ . (מכאן מוכח החלק ה-I).

הוכחה החלק השני: (א דמים)

מהי  $\mathcal{B}$  משפת ב החימים האספולוגיה של קד מ -  $\Sigma$ . (נרצה אלוכית שזה דמים

של  $\tau(\Sigma)$ )

המשפ.

כמוקדן ע.  $\beta < \Sigma$ . (חיתוך של  $\Sigma$  עם עצמה).

כמוקדן ע.  $\tau(\Sigma) < \beta$ . כי דאוסלוקיה ייקסו כי חיתוך העצמה של  $\Sigma$ .

מספר של האיברים של הקד נ -  $\beta$  מהווה אובלוקיה על  $X$  (מובן).  
כחלק קטן.

האובלוקיה נח אובל -  $\tau(\Sigma)$ . (כמו שידר הסדר ע  $\beta$ ).

אולי גם מכלול  $\tau(\Sigma)$  - כי מכלול  $\Sigma$  - וזה  $\tau(\Sigma)$  (הוא).  
הקצת דבר שמכלול  $\Sigma$ .

$\Rightarrow$  האובלוקיה הוא  $\tau(\Sigma)$ .

אופיין  $\beta$  הוא דסיס  $\tau(\Sigma)$ .

$\tau(\Sigma)$  נקרא האובלוקיה הקטנה ע'  $\Sigma$ .

לדוגמא:

ד -  $\mathbb{R}$  נקח  $\Sigma$  - א מספר של הקדניים -

$$\left\{ \{x : x < a\}, \{x, x > a\} \right\}$$

ואז  $\beta$  חתומים הסופיים הם  $\beta$  הקצת עם העצמים.

\* ד -  $\beta$  יהיה  $\Sigma$  המורח  $X$ , כי מילד שדחיק של העצמה הדקה  
מקלים א  $X$ .

6.11.08

$\Sigma$  כגל נקרא - דסיס של  $\tau(\Sigma)$ .

$\tau(\Sigma)$  נקרא האובלוקיה הקטנה ע'  $\Sigma$ .