

7.1 הנדסה מדידת

בדיק 3 - אינטגרל

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ מרחב מדידה

פונקציה $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ אינטגרל (פונקציה)

וקבוצה - המרחב פונקציונלי (אינטגרל)

f פונקציה מדידה

$$f = \sum a_n \mathbb{1}_{A_n}$$

a_n אינטגרל פונקציה A_n -

$$A_n = f^{-1}([a_n, \infty))$$

~~הפונקציה~~

אינטגרל פונקציה $\int_{\Omega} f = \sum a_n \mu(A_n)$

~~הפונקציה~~

כמה ש"ה" $\infty \cdot 0$?

פונקציה $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ אינטגרל פונקציה

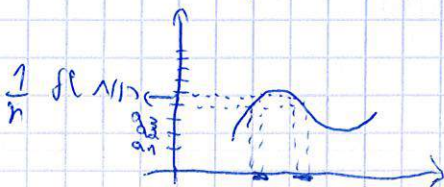
האינטגרל פונקציה

$$\int f := \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$$

האינטגרל פונקציה

האינטגרל פונקציה $f \in L^1$ ~~האינטגרל פונקציה~~

האינטגרל פונקציה $f \in L^1$ ~~האינטגרל פונקציה~~



$$f_n = \sum_{a_k \leq f < a_{k+1}} \mathbb{1}_{A_k}$$

$$f: E \rightarrow \mathbb{R}$$

ש"כ

$$E \subseteq \Omega$$

נ"כ

$$E \supseteq \text{מחזורי}$$

מחזורי

$$f \cdot 1_E$$

נ"כ

$$(E \text{ מחזורי}) \iff \int_E f \, d\mu = \int_E f \cdot 1_E \, d\mu$$

$$\int_E f \, d\mu = \int f \cdot 1_E \, d\mu$$

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ ממשקל } 0, A \subseteq \Omega \text{ מחזורי} \quad (*)$$

כ"כ נקבע דבריו של פונקציה או של חבורה

$$\int_A f \, d\mu = 0$$

$$L^1(\Omega) \text{ ו- } L^1(\mu)$$

$$L^1(\Omega) \text{ ו- } L^1(\mu)$$

מחזורי

$$f = g \text{ נ"כ } \int f \, d\mu = \int g \, d\mu \quad (*)$$

$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$$

$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$$

$$\int |f| \, d\mu = \int |g| \, d\mu$$

$$|f| = 1 \text{ נ"כ } \int |f| \, d\mu = \int 1 \, d\mu$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ -1 & x \notin E \end{cases}$$

$$|f| = 1$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ ו- } f, g \in L^1(\mu)$$

$$\int (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu$$

$$f \leq g \text{ נ"כ } \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$$

$$\int |f| \, d\mu \leq \int |g| \, d\mu$$

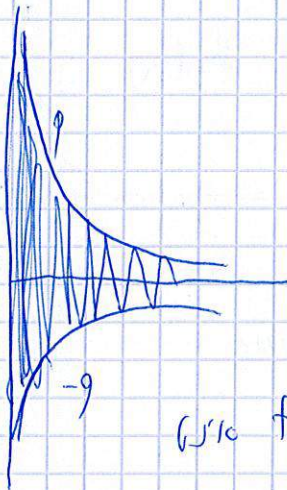
הפונקציה f היא g וריבוע

$f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (5)

אם $|f| \leq g$

אז

הפונקציה f היא g



$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}}$$

$$|f| \leq g$$

אז

הפונקציה f

הפונקציה f היא g

הפונקציה f היא g

הפונקציה f היא g

הפונקציה f היא g

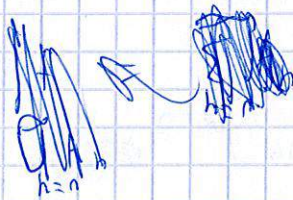
הפונקציה f היא g

הפונקציה f היא g

הפונקציה f היא g

הפונקציה f היא g

הפונקציה f היא g



$$\int_A f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f$$

הפונקציה f היא g

הפונקציה f היא g

הפונקציה f היא g

הפונקציה f היא g

הפונקציה f היא g

הפונקציה f היא g

$$\mu_f(A) = \int_A f d\mu$$

הפונקציה f היא g

$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$$V_f \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \int \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int \mathbb{1}_{A_i} d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} V_f(A_i)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad - \text{ strictly decreasing}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} > \int \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right] \quad \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right]$$

ה'תש"ח ה'תש"ח ה'תש"ח ה'תש"ח ה'תש"ח

$U_f(A) = 0$ N_c SIO $M(A) = 0$ N_c $\gamma_2 / \rho A$ $N_{15} M$
 $\cancel{L^1(M)} \Rightarrow f$ SOS

$$[1 \ll \mu \ll n]$$

2) SO_2 גז, SO_3 נוזל

Agg 11270

μ, ν

$$v = v_f \quad e \rightarrow$$

የጋራ ጥያቄ ለማሟላት የሚያስፈልጉትን ምንጮች ማግኘት

$$\delta_0(A) = \begin{cases} 1 & 0 \in A \\ 0 & 0 \notin A \end{cases}$$

$$m(\{0\}) = 0 \quad \int_0^1 (\{0\}) > 0$$

1/15 2.28 2.28 2.28 2.28 2.28 2.28 2.28

$$m(k) = 0$$

$$M_{\text{cantor}}(k) = 1$$

$$\frac{1}{\gamma h} = \frac{2}{\gamma h}$$

δ_0 ...

$$\int_{\mathbb{R}} f d\delta_0 = f(0)$$

... ..

$0 > f$
 $0 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

$\infty > \mu(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} f = 0$$

$f = 0$

$$(*) \mu \left\{ x \in \Omega : f(x) \geq \frac{1}{k} \right\} = 0$$

... ..

$$\mu \{ f \geq t \} \leq \frac{1}{t} \int_{\Omega} f$$

... ..

$$t \cdot \mu \{ f \geq t \} \leq \int_{\Omega} f$$

... ..

$$\int_{\Omega} \mu \{ f \geq t \} \leq \int_{\Omega} f$$

$$= \mu \{ f \geq t \}$$

... ..

$$\mu \left\{ f \geq \frac{1}{k} \right\} \leq k \int_{\Omega} f = 0$$

$$\mu \{ f > 0 \} = \mu \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ f \geq \frac{1}{k} \right\} = 0$$

... ..

דבורה המשפט לדבורה

נניח $f_1, f_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ~~הם~~ $\mu(\Omega) < \infty$ ~~הם~~

הם $M > 0$ ~~הם~~ ~~הם~~

$x \in \Omega$ ~~הם~~ $|f_n(x)| \leq M$

$f_n \rightarrow f$ ~~הם~~

$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \right) = \int_{\Omega} f$ ~~הם~~

$\int_{\Omega} |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ~~הם~~

נניח f ~~הם~~ $\mu(\Omega) < \infty$ ~~הם~~

$f_n \rightarrow f$ ~~הם~~ $\mu(\Omega) < \infty$ ~~הם~~

נניח f ~~הם~~ $\mu(\Omega) < \infty$ ~~הם~~

$f_n(x) = x^n$ ~~הם~~ $[0,1]$ ~~הם~~ $\int_{[0,1]} f_n \rightarrow \int_{[0,1]} 0 = 0$ ~~הם~~ $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

דבורה המשפט לדבורה

$\mu(\Omega) < \infty$

$\left| \int_{\Omega} f_n - \int_{\Omega} f \right| = \left| \int_{\Omega} (f_n - f) \right| \leq \int_{\Omega} |f_n - f|$

$\int_{\Omega} |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ~~הם~~

נניח f ~~הם~~ $\mu(\Omega) < \infty$ ~~הם~~ $|f(x)| \leq M$ ~~הם~~ $f_n \rightarrow f$ ~~הם~~ $\mu(\Omega) < \infty$ ~~הם~~

Let $f_n \in L^1(\Omega)$ and $f_n \rightarrow f$ in $L^1(\Omega)$

$$\mu(\Omega \setminus A) = 0$$

if

$$A \cap \{x \in \Omega : |f_n| \leq M\} \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \Omega$$

$$\int_{\Omega} |f_n| \leq M \quad \text{for all } n$$

$$f_n \xrightarrow{h \rightarrow \infty} f \quad \text{in } L^1(\Omega)$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \text{such that } \int_{\Omega} |f_n - f| < \epsilon \quad \text{for all } n > N$$

$$\mu(\{x \in \Omega : |f_n - f| > \epsilon\}) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0$$

$$\forall n > N \quad \mu(\{x \in \Omega : |f_n - f| > \epsilon\}) < \frac{\epsilon}{M}$$

$$N < n \quad \text{for all } n$$

$$\int_{\Omega} |f_n - f| = \int_{\Omega_{\epsilon}} |f_n - f| + \int_{\Omega \setminus \Omega_{\epsilon}} |f_n - f|$$

$$\Omega_{\epsilon} = \{x \in \Omega : |f_n - f| > \epsilon\}$$

$$\int_{\Omega_{\epsilon}} |f_n - f| \leq \int_{\Omega_{\epsilon}} 2M = 2M \mu(\Omega_{\epsilon}) = 2\epsilon$$

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_{\epsilon}} |f_n - f| \leq \int_{\Omega \setminus \Omega_{\epsilon}} \epsilon = \epsilon \mu(\Omega \setminus \Omega_{\epsilon}) \leq \epsilon \mu(\Omega)$$

$$\int_{\Omega} |f_n - f| \leq \epsilon(2 + \mu(\Omega))$$

$$\int_{\Omega} |f_n - f| \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0$$

$$\sup_{x \in \Omega} |f_n(x)| < +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f$$

~~Handwritten scribbles and crossed-out text at the bottom of the page.~~

$$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

~

60ew

1. Union

2.33N 1000

1500 / 1000

60ew

$$(R) \int_0^1 f(x) dx = (L) \int_{[0,1]} f(x) d\mu(x)$$

~

~

~

$0 < \epsilon$

1000

$$\int_{[0,1]} h - g < \epsilon$$

$$g \leq f \leq h$$

~

~

~

~

~

~

$$\sum_{i=1}^n (t_{i+1} - t_i) \left[\sup_{[t_i, t_{i+1}]} f - \inf_{[t_i, t_{i+1}]} f \right] < \epsilon$$

$$g(x) = \begin{cases} \inf_{[t_i, t_{i+1}]} f & x \in [t_i, t_{i+1}] \\ \vdots \\ \sup_{[t_i, t_{i+1}]} f & x \in [t_i, t_{i+1}] \\ \vdots \end{cases}$$

$$\epsilon > \sum_{i=1}^n (t_{i+1} - t_i) \left[\sup_{[t_i, t_{i+1}]} f - \inf_{[t_i, t_{i+1}]} f \right] = \sum_{i=1}^n (t_{i+1} - t_i) (h - g) = \int h - \int g = \int h - g$$

$$g_k \leq f \leq h_k$$

~

~

~

$$H_n(x) = \min(h_1(x), \dots, h_n(x))$$

f פונקציה, $n \in \mathbb{N}$ $\rightarrow$ $\{g_k\}_{k=1}^n$

$$G_k(x) = \max \{g_1(x), \dots, g_k(x)\}$$

$$G_k \leq f \leq H_k$$

לכל k

$$\int (H_k - G_k) \leq \int H_k - \int G_k < \frac{1}{k}$$

x שייך ל $G_k(x)$ x שייך ל $H_k(x)$

$$M = \sup |f(x)|$$

$$\forall x \quad |H_k(x)| \leq M$$

$$|G_k(x)| \leq M$$

$$\inf f \leq \sup f$$

$$\bar{f}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} H_k(x)$$

$(f(x))$ $\rightarrow$ $\bar{f}(x)$ $x \in [0,1]$

$$\underline{f}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} G_k(x)$$

m $\rightarrow$ $\bar{f}$ $\rightarrow$ f $\rightarrow$ $\underline{f}$

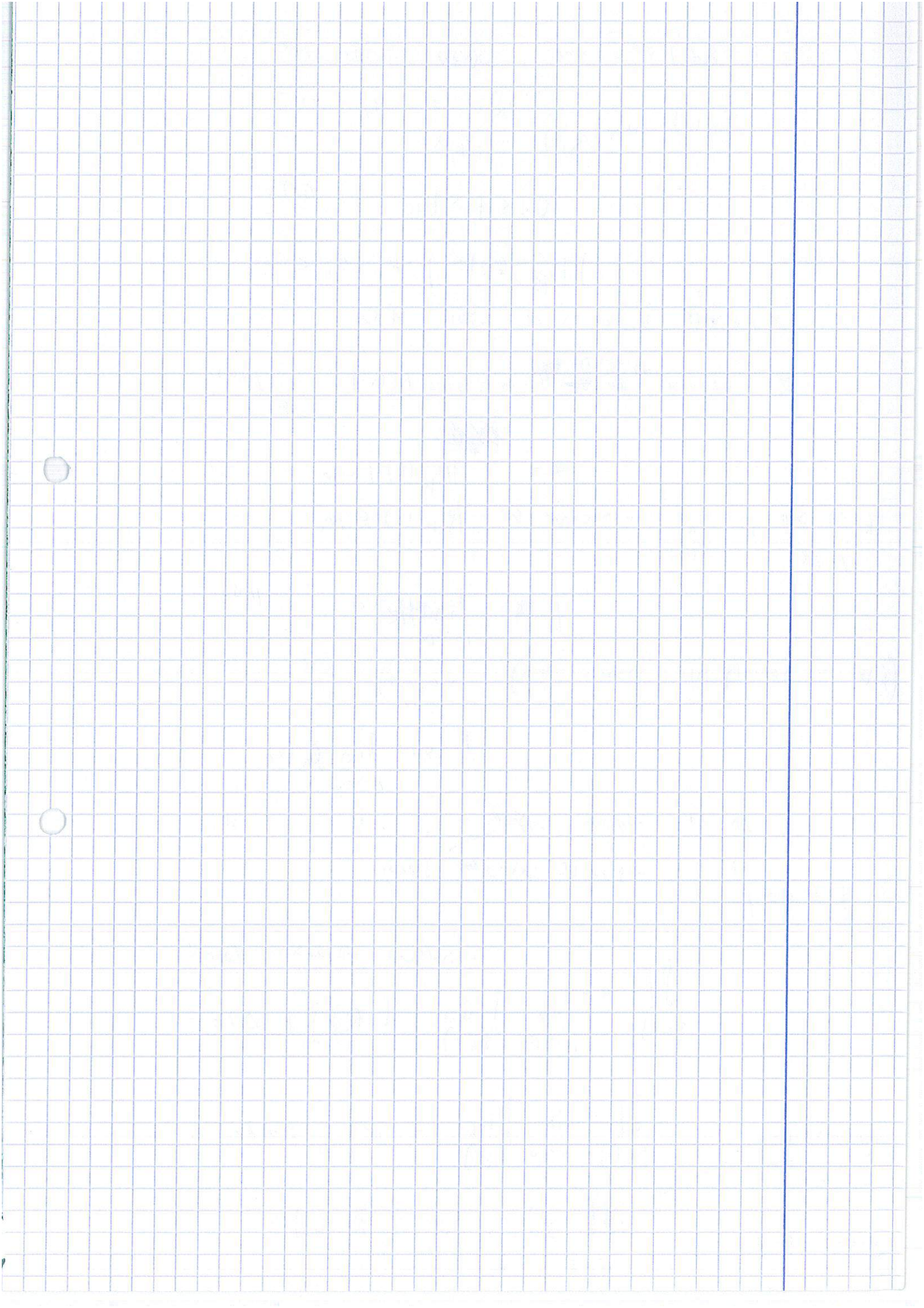
$$\underline{f} \leq f \leq \bar{f}$$

$$\int_{[0,1]} \underline{f} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} G_k = (R) \int_0^1 f(x) dx$$

$$\int_{[0,1]} \bar{f} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} H_k = (R) \int_0^1 f(x) dx$$

אם f ≥ 0 $\rightarrow$ $\bar{f} = f = \underline{f}$

$$\int (\bar{f} - \underline{f}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int (H_k - G_k) = 0$$



$$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$$

1. $\sim 8 \times 10^{10}$ - 10^{11} גלקסיות
הסיומת, $\sim 10^{11}$ גלקסיות

? $f_\infty = \mu(\Omega)$ $\Rightarrow$ μ is σ -finite

6-50, 55, 77

۲۷

$$\bigcup_{h=1}^{\infty} A_h = \mathbb{R}$$

$$\forall n \quad \mu(A_n) < \infty$$

$$R^2 = \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{n!m!} \langle \phi_n | \phi_m \rangle \times \langle \phi_m | \phi_n \rangle$$

$A \subseteq \mathbb{R}$ $\mu(A) = \#(A) \sim 10^8$ 10^8 15^8 2^{10^8}

1. $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt}$
 2. $\frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt}$
 3. $\frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt}$
 4. $\frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt}$
 5. $\frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt}$
 6. $\frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt}$
 7. $\frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt}$
 8. $\frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt}$
 9. $\frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt}$
 10. $\frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt}$

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{and} \quad \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$$

3.3.4. In $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ in

Wie e ~~so~~ $\sim 842,5 \text{ g/l}$ f e $\sim 842,5 \text{ g/l}$

$$\sum_{h=n}^{\infty} \int_{E_n \setminus A_n} |f| < \infty$$

האם יש צורך?

$$\int_E f = \int \sum_{h=1}^{\infty} \int_{E \cap A_h} f \rightarrow \text{immer nicht. Gilt}$$

$\{A_n\}$ $\sim n^2$ $\sim 1/8$ 108 $5226/107$ ~ 387 1116 $\cdot 2.08 - 7$

מחש (המחש, המחש, המחש, המחש) - 1. מחשבה, מחשבה, מחשבה, מחשבה.

הוכחה $\int_E \alpha f + \beta g$ שיהיה $\int_E f, g$ לפי

$$\int_E \alpha f + \beta g = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$$

הוכחה f שיהיה $|f| \leq g$ ו- $\int_E g$ לפי

$$\int_E f \leq \int_E g \quad \text{שיהיה } f \leq g, \text{ ו- } \int_E g \text{ לפי}$$

הוכחה $A_1, A_2, \dots$ שיהיה $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

$$\int_A f = \sum_{h=1}^{\infty} \int_{A_h} f \quad \text{שיהיה } f \text{ ו- } A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

הוכחה $\bigcup_{h=1}^{\infty} \Omega_h = \Omega$ לפי

$$\bigcup_{h=1}^{\infty} \Omega_h = \Omega$$

$A = \bigcup_k A_k$ שיהיה $A_1, A_2, \dots \subset \Omega$ ו- f

$f \in L^1_+(A)$ (שיהיה) A ו- f

$$\int_A f = \sum_{h=1}^{\infty} \int_{A \cap \Omega_h} f$$

הוכחה $(\Omega_h, f|_{\Omega_h}, \mu|_{\Omega_h})$

$$\int_{A \cap \Omega_h} f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k \cap \Omega_h} f$$

$$\Omega_h \cap A = \bigcup_k A_k \cap \Omega_h$$

$$\int_A f = \sum_{h=1}^{\infty} \int_{A \cap \Omega_h} f = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k \cap \Omega_h} f \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{h=1}^{\infty} \int_{A_k \cap \Omega_h} f \right) = \sum_k \int_{A_k} f$$

* סעיף 10.7 ו-10.8 (ע"פ סעיף 10.7)

$$\sum_{k,n} \left| \int_{A_k \cap \Omega_n} f \right| \leq \sum_n \int_{A_n \cap \Omega_n} |f| = \sum_n \int_{A_n} |f| < \infty$$

$\uparrow$ $\downarrow$
 מוסר ל- $\mathbb{R}$ $\sim$ $\mathbb{R}$ $\sim$ $\mathbb{R}$
 (מאחר ש- $\Omega_n \subset \mathbb{R}$)

נניח $|f| \in L^1 \Leftrightarrow f \in L^1$ (מכיוון ש- f היא פונקציה ממשית)

$$\int_A f = 0 \quad \mu(A) = 0 \quad \text{או} \quad (f = \pm \infty \text{ ב-} \mu\text{-מעט})$$

($\mu(A) = +\infty$ או $\mu(A) = 0$) $\int_A f = 0$ או $f|_A = 0$

דוגמה $\int_{\mathbb{R}} f = 0$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ (כאשר μ היא המאסה של לבג)

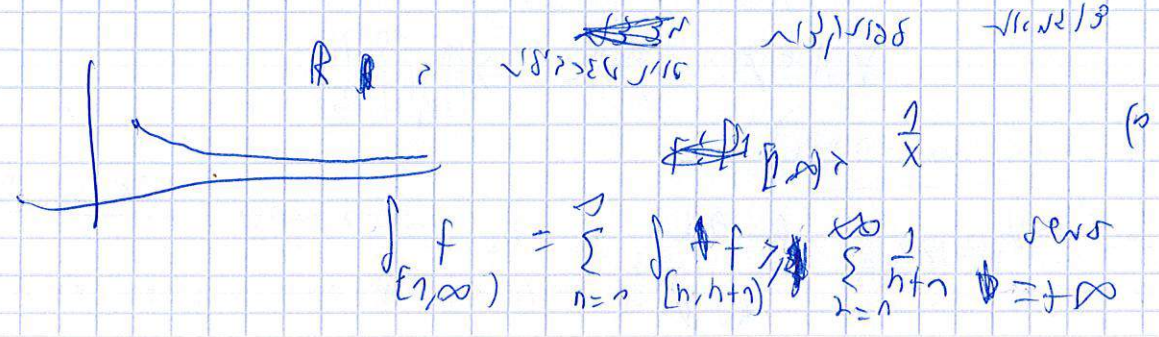
הפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ נקראת פונקציה ממשית.

השאלה $\int_{\mathbb{R}} f = +\infty$ או $-\infty$ כאשר $f \geq 0$ או $f \leq 0$?

$$\int_{\mathbb{R}} f = +\infty \Leftrightarrow \mu(\{x \mid f(x) > 0\}) > 0$$

אם $f|_A = +\infty$ או $-\infty$ ו- $\mu(A) > 0$ אז $\int_A f = \pm\infty$.

$$\int |f| d\mu < \infty \Leftrightarrow f \in L^1$$



$f(x) = \frac{1}{x^p}$ on $[1, \infty)$ for $p > 1$ (2)

$p < 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^p}$ on $(0, 1)$ (3)

$f(x) = \frac{\sinh x}{x}$ on $[0, \infty)$ (4)

$|f| = \frac{|\sinh x|}{x} \geq \frac{\sinh^2 x}{x} = \frac{1}{x} - \frac{\cosh^2 x}{x} =$

$\frac{1}{x} - \frac{\cosh^2 x - 1}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cosh 2x}{2x}$

↓
 (Sinh x) = cosh x
 (Cosh x) = sinh x

Proof of the theorem

Let f be a function on $[a, b]$

$\int_a^b f = - \int_b^a f$

Definition Let f be a function on $[a, b]$

$A \in \mathcal{F}$ then $\nu_f(A) = \int_A f$

$\nu_f(A) = \int_A f$

Let f be a function on $[a, b]$

(Sinh x) = cosh x

(Cosh x) = sinh x

$f \in L^1(\mu)$

$\forall A \in \mathcal{F}$

$\mu(A) < \infty \Rightarrow \int_A f < \infty$

$\mu \geq |f|$

$\nu_f(A) = \int_A f$

$A_n \nearrow A$

ν_f

Let f be a function on $[a, b]$

Let f be a function on $[a, b]$

$\nu_f(A) = \int_A f$

8.1 X-גודל

8.2

הכנסה נורמל

הגדרה f - פונקציה ממשלתית

$$\nu_f(A) = \int_A f$$

הגדרה ν_f - מדידת מדידת

הגדרה ν_f - מדידת מדידת

$$\left[\begin{array}{c} \text{הגדרה} \\ \text{הגדרה} \\ \text{הגדרה} \end{array} \right]$$

הגדרה $f \in L^1(\mu)$ - פונקציה ממשלתית

$$\mu(A) < \infty \rightarrow \int_A f < \infty$$

הגדרה f - פונקציה ממשלתית

$$\mu(A) \leq \int_A f$$

$$\nu_f(A) = \int_A f$$

$$\mu(A) = 0 \rightarrow \nu_f(A) = 0$$

הגדרה μ - מדידת מדידת

$$A_n \subset \Omega$$

$$\mu(A_n) = \frac{1}{2^n}, \quad \nu_f(A_n) \geq \epsilon_0$$

$$\mu(B_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$B_n \supset B$$

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

$$\frac{1}{2^{n-1}} > \mu(B_n) \rightarrow \mu(B)$$

$$\mu(B) = 0$$

$$\mu(B) = 0$$

$$\mu(B) \leq 1$$

$$\mu(B) = 0$$

~~ה~~

$$\mu(B) = 0$$

~~ה~~

$$\nu(B_n) \geq \nu(A_n) \geq \epsilon_0$$

n

ה

ה

$$\nu(B_n) < \infty \quad \text{לכל } n$$

$$\nu(B_n) \rightarrow \nu(B) \quad \text{כאשר } B_n \rightarrow B$$

$$\nu(B) \geq \epsilon_0 \quad \text{אם } \nu(B_n) \geq \epsilon_0$$

$$\nu(B) \geq \epsilon_0, \mu(B) = 0 \quad \text{אם } B \subseteq \Omega \quad \text{קטגוריית הבורגן}$$

$$\otimes \quad \delta \quad \text{הנורמה}$$

הנורמה של פונקציה

$\otimes$

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \quad \text{עבור } f \text{ רגולרית}$$

Radon-Nykodim

ה

ה

$$\mu \text{ הוא } \sigma\text{-finite} \quad \nu \text{ הוא } \sigma\text{-finite} \quad \text{אם } \nu \ll \mu$$

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \quad \text{מדידת פונקציה}$$

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{פונקציה}$$

$$\int_{\Omega} f = \sup \left\{ \int_{\Omega} g : 0 \leq g \leq f \right\}$$

$$\int_{\Omega} f \in [0, +\infty]$$

(support) תמיכה

$$\text{supp}(f) = \{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$$

$$\int_{\Omega} f = +\infty \quad \text{אם } f \text{ איננה אינטגרלית}$$

$$\int_{\Omega} f < \infty \quad \text{אם } f \text{ אינטגרלית}$$

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

$$A_n = \{x \in \Omega \mid \frac{1}{n} \leq f(x) \leq n\}$$

$$A = \{x \in \Omega \mid 0 < f(x) < \infty\} \quad A_n \uparrow A$$

$$I = \nu(\Omega)$$

$$\int_{\Omega} f = I < \infty$$

$$I = \nu(A) \quad \text{if } f=1$$

$$f=0 \text{ or } f=+\infty \implies \int f = 0 \text{ or } \int f = \infty$$

$$\nu(A_N) \nearrow \nu(A) = I$$

$$|\nu(A) - \nu(A_N)| < \epsilon \implies \nu(A_N) > I - \epsilon$$

$$0 \leq g \leq f$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A_{N\epsilon} \\ 0 & x \notin A_{N\epsilon} \end{cases}$$

$$\nu(\text{supp } g) < \infty$$

$$I = \int_{\Omega} f \geq \int_{A_{N\epsilon}} f \geq \int_{A_{N\epsilon}} \frac{1}{N\epsilon} = \nu(A_{N\epsilon}) \cdot \frac{1}{N\epsilon}$$

$$\implies \nu(A_{N\epsilon}) \leq I \cdot N\epsilon$$

$$\text{supp}(g) = A_{N\epsilon}$$

$$\int_{\Omega} f \leq \int_{\Omega} g \leq \int_{\Omega} f$$

$$A = \{x \in \Omega \mid \frac{1}{N} \leq f \leq N\}$$

$$\int_{A^c} f < \epsilon$$

monotone

monotone

$$f_n \xrightarrow{a.e.} f$$

$$f, f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mu(A) < \infty$$

no

monotone

$$\int_A f_n \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \int_A f$$

Fatou

of

$$f, f_n, f_2, \dots: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$f_n \xrightarrow{a.e.} f$$

$$\int_{\Omega} f \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n$$

$$0 \leq g \leq f$$

$$\sup_{g \leq f} \int_{\Omega} g = \int_{\Omega} f$$

$$\int_{\Omega} g d\mu \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n$$

$$m = \sup(g) < \infty \quad A = \text{supp}(g)$$

$$g_n(x) = \min(g, f_n(x))$$

$$\sup(g_n) \leq m \quad \text{supp}(g_n) \subseteq A \quad n \geq 1$$

$$\mu(A) < \infty$$

$$g_n = \min(f_n, g) \xrightarrow{a.e.} \min\{f, g\} = g$$

$$g_n \xrightarrow{a.e.} g$$

$$\min\{a_n, b\} \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \min\{a, b\}$$

monotone

$$\int_{\Omega} g = \int_A g = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n$$

$$\int_{\Omega} g = \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n$$

7

f(x) ~ w(x)

$$\int_{\Omega} f = \sum a_n \mu(A_n)$$

משפט 1.1.1 $\sum a_n \mu(A_n) = \int f$ משפט 1.1.2 משפט 1.1.3

$$\int_{\Omega} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \psi_n$$

משפט 1.1.4 f משפט 1.1.5

$$\psi_n \xrightarrow{u} f$$

$$\int_{\Omega} f = \sup \int_{\Omega} \psi$$

משפט 1.1.6 משפט 1.1.7

$$\psi \leq f$$

$$\int_{\Omega} f = \inf \int_{\Omega} \psi$$

$$\psi \geq f$$

משפט 1.1.8 $\int_{\Omega} f = \sup \int_{\Omega} \psi$ משפט 1.1.9 משפט 1.1.10

משפט 1.1.11 משפט 1.1.12

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-n} & x \in [n, n+1) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

משפט 1.1.13 משפט 1.1.14

משפט 1.1.15

$$\int_{\mathbb{R}} f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} 2^{-n} \chi_{[n, n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mu([n, n+1)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$$

משפט 1.1.16 (Levi) משפט 1.1.17

$f_n \nearrow f$ משפט 1.1.18 משפט 1.1.19 משפט 1.1.20 משפט 1.1.21 משפט 1.1.22 משפט 1.1.23 משפט 1.1.24 משפט 1.1.25 משפט 1.1.26 משפט 1.1.27 משפט 1.1.28 משפט 1.1.29 משפט 1.1.30 משפט 1.1.31 משפט 1.1.32 משפט 1.1.33 משפט 1.1.34 משפט 1.1.35 משפט 1.1.36 משפט 1.1.37 משפט 1.1.38 משפט 1.1.39 משפט 1.1.40 משפט 1.1.41 משפט 1.1.42 משפט 1.1.43 משפט 1.1.44 משפט 1.1.45 משפט 1.1.46 משפט 1.1.47 משפט 1.1.48 משפט 1.1.49 משפט 1.1.50 משפט 1.1.51 משפט 1.1.52 משפט 1.1.53 משפט 1.1.54 משפט 1.1.55 משפט 1.1.56 משפט 1.1.57 משפט 1.1.58 משפט 1.1.59 משפט 1.1.60 משפט 1.1.61 משפט 1.1.62 משפט 1.1.63 משפט 1.1.64 משפט 1.1.65 משפט 1.1.66 משפט 1.1.67 משפט 1.1.68 משפט 1.1.69 משפט 1.1.70 משפט 1.1.71 משפט 1.1.72 משפט 1.1.73 משפט 1.1.74 משפט 1.1.75 משפט 1.1.76 משפט 1.1.77 משפט 1.1.78 משפט 1.1.79 משפט 1.1.80 משפט 1.1.81 משפט 1.1.82 משפט 1.1.83 משפט 1.1.84 משפט 1.1.85 משפט 1.1.86 משפט 1.1.87 משפט 1.1.88 משפט 1.1.89 משפט 1.1.90 משפט 1.1.91 משפט 1.1.92 משפט 1.1.93 משפט 1.1.94 משפט 1.1.95 משפט 1.1.96 משפט 1.1.97 משפט 1.1.98 משפט 1.1.99 משפט 1.1.100

$$\int_{\Omega} f_n \xrightarrow{h} \int_{\Omega} f$$

משפט 1.1.101 משפט 1.1.102 משפט 1.1.103 משפט 1.1.104 משפט 1.1.105 משפט 1.1.106 משפט 1.1.107 משפט 1.1.108 משפט 1.1.109 משפט 1.1.110 משפט 1.1.111 משפט 1.1.112 משפט 1.1.113 משפט 1.1.114 משפט 1.1.115 משפט 1.1.116 משפט 1.1.117 משפט 1.1.118 משפט 1.1.119 משפט 1.1.120 משפט 1.1.121 משפט 1.1.122 משפט 1.1.123 משפט 1.1.124 משפט 1.1.125 משפט 1.1.126 משפט 1.1.127 משפט 1.1.128 משפט 1.1.129 משפט 1.1.130 משפט 1.1.131 משפט 1.1.132 משפט 1.1.133 משפט 1.1.134 משפט 1.1.135 משפט 1.1.136 משפט 1.1.137 משפט 1.1.138 משפט 1.1.139 משפט 1.1.140 משפט 1.1.141 משפט 1.1.142 משפט 1.1.143 משפט 1.1.144 משפט 1.1.145 משפט 1.1.146 משפט 1.1.147 משפט 1.1.148 משפט 1.1.149 משפט 1.1.150 משפט 1.1.151 משפט 1.1.152 משפט 1.1.153 משפט 1.1.154 משפט 1.1.155 משפט 1.1.156 משפט 1.1.157 משפט 1.1.158 משפט 1.1.159 משפט 1.1.160 משפט 1.1.161 משפט 1.1.162 משפט 1.1.163 משפט 1.1.164 משפט 1.1.165 משפט 1.1.166 משפט 1.1.167 משפט 1.1.168 משפט 1.1.169 משפט 1.1.170 משפט 1.1.171 משפט 1.1.172 משפט 1.1.173 משפט 1.1.174 משפט 1.1.175 משפט 1.1.176 משפט 1.1.177 משפט 1.1.178 משפט 1.1.179 משפט 1.1.180 משפט 1.1.181 משפט 1.1.182 משפט 1.1.183 משפט 1.1.184 משפט 1.1.185 משפט 1.1.186 משפט 1.1.187 משפט 1.1.188 משפט 1.1.189 משפט 1.1.190 משפט 1.1.191 משפט 1.1.192 משפט 1.1.193 משפט 1.1.194 משפט 1.1.195 משפט 1.1.196 משפט 1.1.197 משפט 1.1.198 משפט 1.1.199 משפט 1.1.200

$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\rightarrow$ $\frac{\delta(x)}{2\pi x}$
 $f(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2 \sqrt{|x-r_h|}} \cdot \mathbb{1}_{[r_{h-1}, r_h+1]}$

$\cdot \tilde{f} \rightarrow f \in L^1(\mu)$

$\tilde{f} \rightarrow f \in L^1(\mu)$ $\rightarrow$ $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$
 $\tilde{f} \rightarrow f$

$f_h(x) = \sum_{k=1}^h \frac{1}{k^2 \sqrt{|x-r_k|}} \cdot \mathbb{1}_{[r_{k-1}, r_k+1]}$

$f_h \rightarrow f$

$[-1, 1] \rightarrow \frac{1}{\sqrt{|x|}}$

$\int_{\mathbb{R}} f_h = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^h \frac{1}{k^2 \sqrt{|x-r_k|}} \cdot \mathbb{1}_{[r_{k-1}, r_k+1]} =$
 $= \sum_{k=1}^h \frac{1}{k^2} \int_{[r_{k-1}, r_k+1]} \frac{1}{\sqrt{|x-r_k|}} = \sum_{k=1}^h \frac{1}{k^2} \int_{[-1, 1]} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = \sum_{k=1}^h \frac{1}{k^2} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx =$
 $= 4 \sum_{k=1}^h \frac{1}{k^2}$

$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{A}{2\sqrt{x}}$

$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_h = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{2\pi^2}{3}$

$\int_{\mathbb{R}} f = \frac{2\pi^2}{3} < \infty$

$\tilde{f} \rightarrow f \in L^1(\mu)$

$f \in L^1(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ $\lim_{|w| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{iwx} dx = 0$ (Riemann-Lebesgue Lemma)
 $f \in L^1(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ $\lim_{|w| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{iwx} dx = 0$

$$\lim_{|w| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{iwx} dx = 0$$

$$f(x) = \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

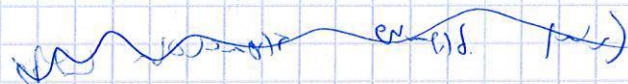
$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[a,b]}(x) e^{iwx} dx = \int_a^b e^{iwx} dx = \frac{e^{iwb} - e^{iwa}}{iw} \xrightarrow{|w| \rightarrow \infty} 0$$

$f \in L^1(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ $\lim_{|w| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{iwx} dx = 0$
 $f \in L^1(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ $\lim_{|w| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{iwx} dx = 0$

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \lim_{|w| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{iwx} dx = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f-g| < \epsilon \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f(x) e^{iwx} - g(x) e^{iwx}| < \epsilon$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{iwx} dx \right| \leq \left| \int_{\mathbb{R}} (f(x) - g(x)) e^{iwx} dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{iwx} dx \right| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$



$f \geq 0$ $\Rightarrow$ $\int_{\mathbb{R}} f = \int_0^{\infty} f(t) dt$

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_0^{\infty} f(t) dt$$

Wir: $0 \leq f$ $\rightarrow$ ∞

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_0^{\infty} m\{f \geq t\} dt$$

53

$$f_h(x) = \frac{\lfloor 2^h f(x) \rfloor}{2^h}$$

1.3.1

1.3.2

$$f_{h-1} \leq f_h \quad \rightarrow \quad \text{if we}$$

$$f_h \rightarrow f \quad |p|$$

Wolfram $\rightarrow$ Wolfram $\rightarrow$ Wolfram $\rightarrow$