~~משפט~~ ממשיך התרגול ת. 6 (סוכם) המרצה

(המרצה לא סיכם את התרגול)

נוכיח את משפט ~~[illegible]~~

Egorov

משפט נניח $f_n \xrightarrow{a.e} f$ במרחב מידה סופי Ω

אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $A \subseteq \Omega$ כך ש $\mu(\Omega \setminus A) < \varepsilon$

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

כלומר לקבל קבוצה גדולה במידה כמעט מלאה, ושם יש התכנסות במ"ש.

הוכחה

נגדיר $\Omega' \subseteq \Omega$ הקבוצה שבה $f_n(x) \to f(x)$

מתקיים $\mu(\Omega) = \mu(\Omega')$

נגדיר

$$A_N = \{x \mid \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| \le \tfrac{1}{2}\}$$

מתקיים $\bigcup_N A_N \supseteq \Omega'$ ~~$A_N \nearrow \Omega'$~~

לכן קיים $n_1 > 0$ כך ש

$$\mu(A_{n_1}^c) \le \frac{1}{2}$$

(מונוטוניות של $\mu(A_N)$)

נגדיר $E_1 = A_{n_1}$

קיימים $n_1, n_2, n_3 \dots$ כך ש

$$E_k = \{x \mid \forall n \ge n_k \quad |f_n(x) - f(x)| \le \tfrac{1}{2^k}\}$$

מתקיים $\mu(E_k^c) \le \frac{1}{2^k}$

טענה

$$\mu\Big(\bigcap_{k>n} E_k\Big) \ge \mu(\Omega) - \frac{1}{2^n}$$

הוכחה:

$$\mu\Big(\big(\bigcap_{k>n} E_k\big)^c\Big) = \mu\Big(\bigcup_{k>n} E_k^c\Big) \underset{\text{תת-אדיטיביות}}{\le} \sum_{k>n} \mu(E_k^c) \le \sum_{k>n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

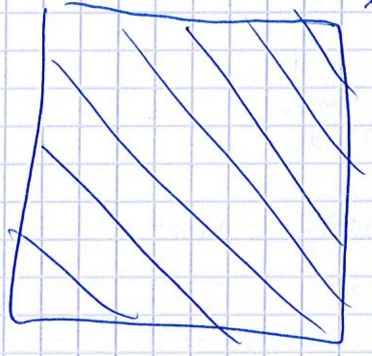
יהי $\varepsilon>0$ אז קיים $n>0$ כך

ש $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$

ובנוסף $\mu(\bigcap_{k\geq n} E_k) > \mu(\Omega)-\varepsilon$

נסמן $A=\bigcap_{k>n} E_k$ ואז

$\forall N > n_k$ $\quad \sup_{x\in A} |f_N(x)-f(x)| \leq \frac{1}{2^k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$



אינטגרל לבג

(פרק 3)

איך סוכמים כסף?

יש 2 דרכים מרכזיות:

$\frac{1}{2}$, 5 , 10 , 1 , $\frac{1}{2}$, 1 ...

אינטגרל רימן: נסכום לפי הסדר

אינטגרל לבג - נסכום כמה יש מכל מטבע, נכפיל ונסכום

~~יהי~~ (Ω,F,μ) מרחב מידה סופי.

הגדרה תהי $f:\Omega\to\mathbb{R}$ היא פונקציה פשוטה.

אם היא מדידה, ולוקחת ערכים שהם מתוך קבוצה

(כלומר סופית או בת מנייה.

כלומר $f(\Omega)=\{f(x) \mid x\in\Omega\}$ סופית או בת מנייה.

דוגמאות:

1. $\sin x$ לא פשוטה
2. x (בלבסג) לא פשוטה
3. עבור A מדידה $1_A(x)$ היא פשוטה.
4. $f(x)=x\cdot 1_{\mathbb{Q}}(x)$ פשוטה

הגדרה

כל פונקציה פשוטה ניתנת להצגה כך:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{N} a_n \mathbb{1}_{A_n}(x)$$

כאשר $a_n\in\mathbb{R}$ A_n מדידות $N\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$

אם נדרוש ש $a_i\neq a_j$ לכל $i\neq j$

ו- $A_i\cap A_j=\emptyset$ לכל $i\neq j$

אז ההצגה היא יחידה עד כדי סדר והוספת של 0

ההצגה הקנונית

נסמן $f(\Omega)=\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ אז

ונגדיר $A_n=f^{-1}(\{a_n\})$.

הגדרה תהי f פונקציה פשוטה.

נאמר ש f אינטג' לבג אם

$$\sum_{n=1}^{N}|a_n|\mu(A_n)<\infty \quad N\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$$

במקרה זה נסמן $f\in L^1(\Omega,F,\mu)$ $\Leftarrow$ תלוי בכדי מידה μ ו- F ו-σ-אלג'

ונגדיר

$$\int_\Omega f=\sum_{n=1}^{N}a_n\mu(A_n)$$

סימונים נוספים:

$$\int_\Omega f=\int_\Omega f\,d\mu=\int_\Omega f(x)\,d\mu=\int_\Omega f(x)\,d\mu(x)=\int_\Omega f(x)\,\mu\{dx\}$$

הערה ① ההגדרה של האינטגרל קנונית [illegible] תלות

② אנחנו מגדירים ל "$0\cdot\infty$" להיות 0 שכן הסכימה לא שונה כמובן.

כלומר אם $a_n=0$ $\mu(A_n)=\infty$

ואז אם $a_n=\infty$ $\mu(A_n)=0$ אז $a_n\mu(A_n)=0$

אם $a_n=\infty$ $\mu(A_n)>0$ אז האינטגרל לא אינטגרבילית

<u>דוגמאות</u>

(1) $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$

$$f([n,n+1))=\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\cdot m([n,n+1))=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

(2) $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$

$$f([n,n+1))=\frac{(-1)^n}{n}$$

אז $f\notin L_1(\mathbb{R}_+)$ (כלומר לא אינט', טור)

~~כלומר~~ אבל אינטגרל רימן המוכלל מתכנס קיים

(3) $[0,1]$ ב- $D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

$$\int_{[0,1]}D(x)=1\cdot m(\mathbb{Q}\cap[0,1])+0\cdot m([0,1]\setminus\mathbb{Q})=1\cdot 0+0\cdot 1=0$$

הגדרה: יהי $E\subseteq\Omega$ מדידה, f פשוטה אי-שלילית (הצגה)

$$\int_E f=\sum_{n=1}^{N}a_n\mu(A_n\cap E)=\int_{\Omega}f\cdot\mathbb{1}_E$$

כי $\mathbb{1}_{A_n\cap E}=\mathbb{1}_{A_n}\cdot\mathbb{1}_E$

תכונות פשוטות שנובעות מההגדרה:

(1) אם f,g מדידות ו- $f\overset{a.e.}{=}g$ אז $\int_E f=\int_E g$

לכל E מדידה

<u>הוכחה</u>

$$A=\{x\in\Omega \mid f(x) \neq g(x)\}$$ נגדיר

אזי A מדידה וגם $\mu(A)=0$

$$f(x)=\sum a_n \mathbb{1}_{A_n}$$

$$g(x)=\sum b_n \mathbb{1}_{B_n}$$

$$f(x)=\sum a_n \mathbb{1}_{A_n\cap A}+a_n \mathbb{1}_{A_n\setminus A}$$

$$g(x)=\sum b_n \mathbb{1}_{B_n\cap A}+b_n \mathbb{1}_{B_n\setminus A}$$

ולכן הקבוצות $A_n\cap A$, $B_n\cap A$ הן ממידה אפס

(2) f פשוטה $f\in L^1(\Omega) \iff |f|\in L^1(\Omega)$

<u>הוכחה</u> נניח שהיא פשוטה ולכן: $f(x)=\sum^N a_n \mathbb{1}_{A_n}(x)$ (A_n זרות מדידות)

ומתקיים $|f|(x)=\sum^N |a_n| \mathbb{1}_{A_n}(x)$

מכאן שאינטגרל פשוט מוגדר, סכום סופי של f ו- $|f|$

(3) $f\in L^1(\Omega)$ פשוטה, ו- $E_1,E_2,\dots\subseteq\Omega$ מדידות וזרות

נסמן $E=\bigcup E_n$

$$\int_E f=\sum\int_{E_n} f$$

הוכחה:

$$\int_E f=\sum_n a_n \mu(A_n\cap E)\underset{\sigma\text{-אדיטיביות של }\mu}{=}\sum_n a_n \sum_k \mu(A_n\cap E_k)\underset{\text{מתכנסים בהחלט}}{=}\sum_k\sum_n a_n \mu(A_n\cap E_k)=$$

$$=\sum_k \int_{E_k} f$$

תרגיל

① מספיק להראות ש f אינט' ב E

② מספיק להראות ש $\sum_k \int_{E_k} |f| < \infty$

③ נניח ש f אינט' ו E_k חלוקה של E

דוגמה $f([n,n+1]) = \frac{(-1)^n}{n}$

טענה ④ f,g פשוטות $\alpha f+\beta g$ אינט' ו-

$$\int_\Omega (\alpha f+\beta g) = \alpha\int_\Omega f + \beta\int_\Omega g$$

הוכחה:

נסמן $f(x) = \sum a_n 1_{A_n}$ $\quad g(x) = \sum b_n 1_{B_n}$

נניח ש A_n זרים בזוגות ו- B_n זרים בזוגות ← (עבור בטעות כנראה לא שימושי)

ניקח את כל החיתוכים $A_k \cap B_l$

ונסמן אותם $E_1, E_2, \dots$

אז על קבוצה E_n f ו- g קבועות.

קיבלנו חלוקה של המרחב, שאם ~~...~~ נחבר אותן נקבל את המרחב.

$$\int_\Omega(\alpha f+\beta g) = \int_{\bigcup E_n}(\alpha f+\beta g) = \sum_n \int_{E_n}(\alpha f+\beta g) = \sum_n\left(\alpha\int_{E_n} f + \beta\int_{E_n} g\right) =$$

Δ מספיק להמשיך

$$= \sum_n (\alpha f+\beta g)\cdot\mu(E_n)$$

$$\underset{f,g \text{ אינט'}}{=} \alpha\int_{E_n} f + \beta\int_{E_n} g = \alpha\int_\Omega f + \beta\int_\Omega g$$

למה במקרה Δ ~~...~~ מספיק?

נראה ש $\sum_k \int_{E_k} |\alpha f+\beta g| < \infty$

עבור כל

$$\int_{E_k} |\alpha f+\beta g| \underset{\Delta \text{ אש}}{\leq} |\alpha|\int_{E_k}|f| + |\beta|\int_{E_k}|g|$$

כעת:

f,g אינט'

סכום סופי של טורים מתכנסים

$$\sum_k \int_{E_k}|\alpha f+\beta g| \leq \sum_k |\alpha|\int_{E_k}|f| + |\beta|\int_{E_k}|g| = |\alpha|\sum_k\int_{E_k}|f| + |\beta|\sum_k\int_{E_k}|g| < \infty$$

תרגיל 2

אם f,g פשוטות ואינטג', $f \overset{a.e.}{\le} g$

אז $\int_\Omega f \le \int_\Omega g$

(תרגיל) הוכחה - כמו רציון, אבל סמוכים על ידי שלב-ט',

סה פונקציות הפוכות - סכום פשוטות אי-שליליות, ואז בהגדר תכונה 4.

תרגיל למחשבה

נניח f,g פשוטות, g אינטג' ו- $|f|\le g$

אזי f אינטג'

רציון, לפי הגדרה f אינטג' אם $|f|$ אינטג'

(6) אם f חסומה, פשוטה וברזלית מתמך מידה סופית אז f אינטג'.

זה מקרה פרטי של תרגיל $|f|\le g$ הקודם.

נסמן $M=\sup|f|$

$$A = supp\, f = \{x \mid f(x)\neq 0\}$$

תומך support

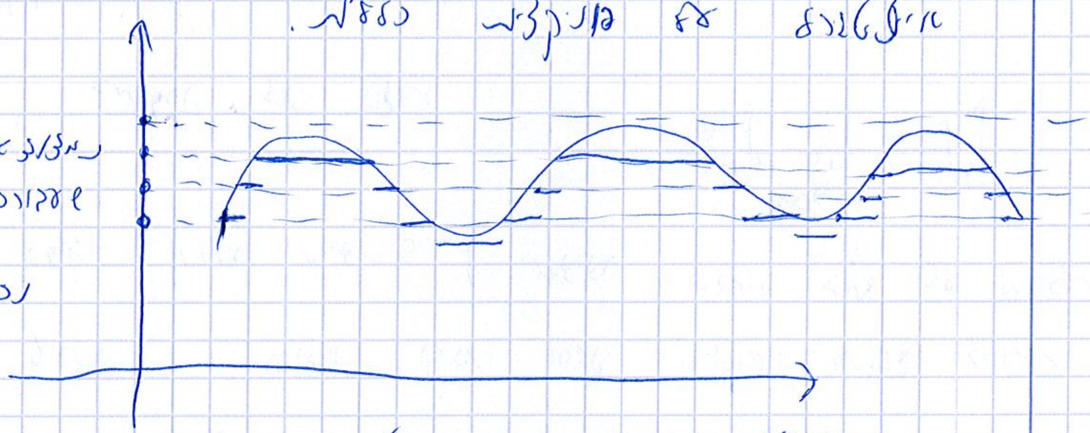
אז $|f| \le M\cdot 1_A$ A מדידה, M ו- $\mu(A)$ סופיים

לכן $M 1_A$ מדידה פשוטה אינטגרבילית.

ולכן $|f|\le M\cdot 1_A$ לפי התרגיל f אינטג'.

אינטגרל של פונקציה כללית.

מחלקים את הטווח ל-x שעבורם $f(x)$ בקטע, מקבלים פונקציה פשוטה נכונים גם לגבול.



קירוב ע"י פונקציה פשוטה

__למה__: יהי $f:\Omega\to\mathbb{R}$ פונק' מדידה, ויהי $\varepsilon>0$

אז קיימת פונק' פשוטה φ כך ש
$$\sup_{x\in\Omega}|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$$

קירוב במ"ש ע"י פונקציות "פשוטות"

__הוכחה__: יהי $\varepsilon>0$. נגדיר
$$A_j=\{x\in\Omega \mid \varepsilon\cdot j\le f(x)<(j+1)\varepsilon\}$$

אז A_j מדידות וזרות, ומתקיים: $\bigcup_{j=-\infty}^{\infty}A_j=\Omega$

$$x\in A_j \Rightarrow |f(x)-\varepsilon\cdot j|<\varepsilon$$

נגדיר: $\varphi(x)=\sum \varepsilon\cdot j\cdot 1_{A_j}$

$\varphi(x)$ פשוטה, וקרובה ε ל$f(x)$

__מסקנה__: אם f מדידה ל Ω קיימת סדרה $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ של פשוטות כך ש $\varphi_n\xrightarrow{u}f$

__הערה__: קירוב במידה שווה ע"י פונקציות חסומות באופן אחיד נותן פונקציה חסומה.

__הגדרה__: נניח $\boxed{\mu(\Omega)<\infty}$ ו $f:\Omega\to\mathbb{R}$

נאמר ש f אינט' $(f\in L^1(\Omega))$

אם קיימת פונק' אינט' פשוטות φ_n כך ש $\varphi_n\xrightarrow{u}f$

במקרה זה נגדיר
$$\int_\Omega f=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\varphi_n$$

הערה - נובע מייד ש f מדידה כגבול במ"ש של מדידות.

__טענה__: הגבול קיים סופי ואינו תלוי בבחירת φ_n

__הוכחה__: נוכיח שהסדרה היא קושי:
$$\left|\int_\Omega\varphi_n-\int_\Omega\varphi_m\right|=\left|\int_\Omega(\varphi_n-\varphi_m)\right|\le\int_\Omega|\varphi_n-\varphi_m|\le\int_\Omega\sup|\varphi_n-\varphi_m|=$$
$$=\mu(\Omega)\cdot\sup(|\varphi_n-\varphi_m|)\xrightarrow{m,n\to\infty}0$$

(ובשימוש בכך ש $\varphi_n \xrightarrow{u} f$)

לכן הגבולות שווים.

גם $\psi_n \xrightarrow{u} f$

$$\left|\int_\Omega \psi_n - \int_\Omega \varphi_n\right| \le \int_\Omega |\psi_n - \varphi_n| \le \mu(\Omega)\cdot \sup(|\psi_n - \varphi_n|) \underset{\Delta\ \text{א"ש}}{\le}$$

$$\le \mu(\Omega)\cdot\left(\sup|\psi_n - f| + \sup|f - \varphi_n|\right) \xrightarrow[\text{ה}]{n\to\infty} 0$$

מהתכנסות במ"ש של φ_n, ψ_n.

ממשיכים הרצאה 6.2

טענה: נניח ש- $\mu(\Omega)<\infty$ ונניח ש- f מדידה וחסומה.
אזי f אינטגרבילית.

הערה חשובה: תנאי החסימות אינו הכרחי לאינטגרביליות.

דוגמה: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathbb{1}_{\left[\frac{1}{(n+1)^3},\frac{1}{n^3}\right]}$

לא חסומה אבל אינטגרבילית (תרגיל פשוט)

הוכחה 1: אם f פשוטה וחסומה אז אינטגרבילית.

הוכחה 2: אם $\varphi_n \xrightarrow{u} f$ פשוטות אז כל φ_n חסומה במידה אחידה ה"מ

$$\sup_{x\in\Omega}|\varphi_n| = \sup_{x\in\Omega}|\varphi_n-f+f| \le \underbrace{\sup_{x\in\Omega}|\varphi_n-f|}_{\le 1} + \underbrace{\sup_{x\in\Omega}|f|}_{\le M<\infty}$$

1 החל מ- n כי התכנסות במ"ש.

$M<\infty$ כי f חסומה

לכן לכל $n>N$ מספיק מתקיים

$$\sup_{x\in\Omega}|\varphi_n| \le M+1$$

יש לנו חסימה במידה אחידה (הם חסומות מאותו מקום).

לכן מצאנו סדרה פונקציות פשוטות אינטגרביליות שמתכנסות ל- f במ"ש.

הערה: באותו אופן, אם f חסומה ו- $E\subseteq\Omega$ מדידה אזי $\int_E f$ קיים וסופי (f אינט' ב- E).

תכונות של אינטגרל לבג עבור מידה סופית

0) אם $\mu(A)=0$ אזי $\int_A f=0$ לכל $f:A\to\mathbb{R}$ מדידה.

(כי לכל פונקציה פשוטה על A האינטגרל הוא 0)

1) $f\overset{a.e.}{=}g$ ואינט' אזי $\int_\Omega f=\int_\Omega g$ (f אינט')

② טענה: f מדידה: $f\in L^1(\Omega) \iff |f|\in L^1(\Omega)$

הוכחה: אם $\varphi_n \xrightarrow{u} f$ מדרגות אז $|\varphi_n| \xrightarrow{u} |f|$

ו- $|\varphi_n|$ מדרגות אינטגרביליות. לכן $\Leftarrow$ מתקיים

$\Rightarrow$ $\varphi_n \xrightarrow{u} |f|$ מדרגות אינט'

נגדיר ψ_n אז מדרגות, בנוסף $\psi_n(x) = \operatorname{sign}(f(x))\,\varphi_n(x)$

אז ψ_n מדרגות אינט' ו-

$$\sup_{x\in\Omega}|\psi_n - f| = \sup_{x\in\Omega}\big||\psi_n|-|f|\big| = \sup_{x\in\Omega}\big|\varphi_n - |f|\big| \longrightarrow 0$$

ψ_n שומרת סימן f

לכן $\psi_n \xrightarrow{u} f$

③ ~~לינאריות~~

$f,g\in L^1(\Omega)$ ו- $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

אז

$$\int_\Omega \alpha f+\beta g = \alpha\int_\Omega f + \beta\int_\Omega g$$

אם $\varphi_n \xrightarrow{u} f$ $\psi_n\xrightarrow{u} g$

$$\alpha\varphi_n+\beta\psi_n \xrightarrow{u} \alpha f+\beta g$$

לכן מדרגות אינט' ולכן

$$\int_\Omega \alpha f+\beta g = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \alpha\varphi_n+\beta\psi_n =$$

$$= \underset{\substack{\uparrow\\ \text{לינאריות}\\ \text{אינט' מדרגות}}}{} \lim_{n\to\infty}\left(\alpha\int_\Omega\varphi_n+\beta\int_\Omega\psi_n\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{מהגדרת אינט'}}}{=} \alpha\int f+\beta\int g$$

④ אם $f,g\in L^1(\Omega)$ $f\overset{a.e.}{\le} g$ (כמעט) אז $\int_\Omega f\le\int_\Omega g$

הוכחה: מלמה 1 נניח בה"כ $f\le g$ בכל מקום.

נניח $\varphi_n\xrightarrow{u} f$ $\psi_n \xrightarrow{u} g$ מדרגות אינט', $\tilde\psi_n=\max\{\psi_n(x),\varphi_n(x)\}$ נשים לב $\tilde\psi_n \xrightarrow{u} g$

$$\sup_{x\in\Omega}|\tilde\psi_n - g| \overset{f\le g}{=} \sup_{x\in\Omega}\{\tilde\psi_n - \max f,g\} \le \sup|\psi_n-g|+\sup|\varphi_n-f| \longrightarrow 0$$

כלומר $\tilde{\varphi}_n \to g$ פשוטות, אינט׳, ו- $\varphi_n \le \tilde{\varphi}_n$ לכל n ולכן

נשאיף לגבולות, ונקבל

$$\int f = \lim \int \varphi_n \le \lim \int \tilde{\varphi}_n = \int g$$

f הינה $\varphi \le \psi \Rightarrow \int \varphi \le \int \psi$ מהמונוטוניות.

(5) f, g מדידות $|f| \le g$ ו- g אינט׳ אזי f אינט׳.

ו-

$$\left|\int f\right| \le \int |f| \le \int g$$

בניגוד להגדרת רימן פשוטה.

(6) σ-אדיטיביות של האינטגרל:

תהיינה $E_1, E_2, \ldots \subseteq \Omega$ מדידות זרות

ונסמן $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ אזי $\int_E f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f$

בתנאי ששני התנאים מתקיימים!

(i) f אינט׳ ב-E

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f| < \infty$

שימו לב התנאים שקולים

<u>הוכחה</u>: יהי $\varepsilon > 0$ יש φ פשוטה כך ש- $\sup_E |f - \varphi| < \varepsilon$

ולכן לכל $A \subseteq E$ מדידה

⊛ $\int_A |\varphi - f| \le \varepsilon \mu(A)$

f אינט׳ ב-E $\Leftrightarrow$ f אינט׳ ב-E ו- $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f| < \infty$

(כי) שבה יהיה מוגדר בהנחה אם (i)

נובע מ σ-אדיטיביות של המידה ומ ⊛

$\Updownarrow$

$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |\varphi| < \infty$

ל פונק׳ פשוטה $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} \varphi = \int_E \varphi$

מהקירוב נקבל

$$\left|\int_E f - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\right| < 2\varepsilon \mu(E)$$

(7) $A \subseteq B$ מדידות ו- f אינט׳ ב-B אזי f אינט׳ ב-A

למת בורל קנטלי

משפט

חלק ראשון של בורל קנטלי

יהי (Ω, F, μ) מרחב מידה ו- $A_1, A_2 \dots$

כך ש $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) < \infty$

אזי $\mu(\limsup A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k>n} A_k\right) = 0$

תזכורת $x \in \limsup A_n \iff$ קיימת תת-סדרה A_{n_k}

כך ש $x \in A_{n_k} \ \forall k$

מסקנה יהי $0<\varepsilon$

נגדיר $E \subseteq [0,1]$ אוסף כל

המספרים כך שיש אינסוף $q \in \mathbb{N}$ המקיימים

$|x - \frac{p}{q}| \le \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$ עבור $p \in \{0,1,\dots q-1\}$

נקראים מספרים מקורבים היטב

אזי $\mu(E)=0$

תזכורת: מצאנו עבור מקרבים כמו $\frac{1}{q^2} \ge |x - \frac{p}{q}|$ לכל x אי רציונלי

יש אינסוף q עם מכנים כאלה

משפט דיריכלה

הוכחה עבור p, q כלשהם נגדיר

$$A_{p,q} = \left\{x \in [0,1] \,\middle|\, |x - \frac{p}{q}| \le \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}\right\}$$

$$\mu(A_{q,p}) \le \frac{2}{q^{2+\varepsilon}}$$

מתקיים

$$E = \limsup(A_{q,p})$$

$$\sum_{q,p} m(A_{p,q}) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{q-1} m(A_{p,q}) \le \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{q-1} \frac{2}{q^{2+\varepsilon}} = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{2}{q^{1+\varepsilon}} < \infty$$

ולכן לפי בורל קנטלי $\mu(E)=0$

הגדרה

$f:\Omega\to\mathbb{R}$ מדידה אם לכל $a\in\mathbb{R}$

הקבוצה $\{x\in\Omega \mid f(x)<a\}$ מדידה.

ניתן להחליף את $<$ ב-$\le$, או $>$ או $\ge$

אותו קריטריון.

דוגמה כל פונקציה רציפה היא מדידה.

הגדרה תכונה מתקיימת כמעט בכל מקום $(a.e.)$ אם קיימת $A\subseteq\Omega$ מדידה כך שהתכונה מתקיימת ב-A ו-$\mu(A^c)=0$.

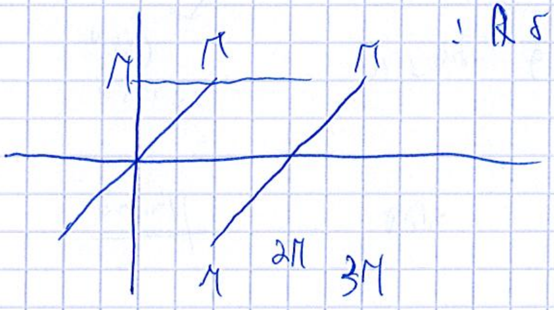
דוגמה התכנסות $a.e.$ של פונקציות

$f_n \xrightarrow{a.e.} f$ אם $\mu(\{x \mid f_n(x)\not\to f(x)\})=0$

דוגמאות

① $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \overset{a.e.}{=} 0$

② נסמן ב-f את ההמשכה המחזורית של x מ-$[-\pi,\pi)$ ל-$\mathbb{R}$!



אז $f(x) \overset{a.e.}{=} 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$

טור פורייה

משפט Egorov אם $\mu(\Omega)<\infty$ ו-$f_n\xrightarrow{a.e.}f$

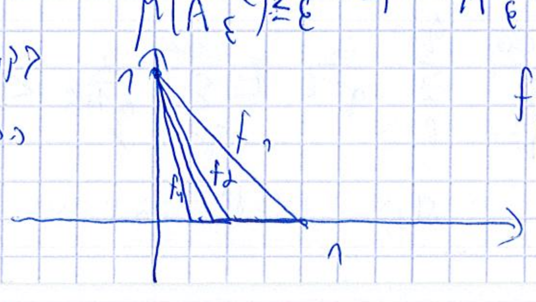
אז לכל $\varepsilon>0$ קיימת קבוצה $A_\varepsilon\subseteq\Omega$ מדידה

כך ש-$f_n\xrightarrow{u}f$ ב-A_ε ו-$\mu(A_\varepsilon^c)\le\varepsilon$

דוגמה $f_n(x)=\begin{cases}1-nx & x\le\frac{1}{n}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$ ב-$[0,1]$

$f_n\xrightarrow{a.e.}0$

בקבוצה $[0,1]\setminus[0,\varepsilon]$ ההתכנסות במידה שווה ε.



ומשלים $(A_{\varepsilon}^{c})=\varepsilon$

$[0,2]\setminus[0,\varepsilon)$

הגדרה

$\{f_n\}$ נאמר מתכנסת במידה ל f

אם לכל $0<\varepsilon$

$$\mu(\{x \mid |f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

הגדרה

העתקה $T:\Omega\to\Omega$ נקראת מדידה, אם לכל

$f:\Omega\to\mathbb{R}$ מדידה, $f\circ T$ מדידה.

$T:\Omega\to\Omega$ נקראת שומרת מידה אם היא מדידה ו-

$$\mu(T^{-1}(A))=\mu(A)$$

לכל $A\subseteq\Omega$ מדידה.

משפט (משפט החזרה של Poincaré)

תהי $T:\Omega\to\Omega$ שומרת מידה. $\mu(\Omega)<\infty$

אז לכל $E\subseteq\Omega$ עם $0<\mu(E)$

[illegible] E

קיים $n\geq 1$ כך ש $T^n(x)\in E$

הוכחה תהי $E\subseteq\Omega$ כנ"ל.

נגדיר $A_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}T^{-k}E$

לכל $j\geq i$ ~~A_i~~ $A_j=T^{-(j-i)}A_i$

לכן $\mu(A_i)=\mu(A_j)$

בנוסף $A_0\supseteq E$ לכן $\mu(E\setminus A_n)\underset{\text{מונוטוניות}}{\leq}\mu(A_0\setminus A_n)\underset{A_n\subseteq A_0}{=}\mu(A_0)-\mu(A_n)=0$

$$\mu\left(E\setminus\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E\setminus A_n)\right)=0$$

איחוד בן מנייה של קבוצות ממידה 0,

$$\mu(E) = \mu\left(E \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) + \mu\left(E \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right)$$

מוגדר

-1

כיון ש $E \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ הנתון שאמרנו ל E

מוכל בנחתם