

S.1 מדידת מרחק

המרחק בין הנקודות a ו- b הוא $|b-a|$

המרחק בין הנקודות a ו- b הוא $|b-a|$

$$\mu_f([a,b]) = f(b) - f(a)$$

המרחק בין הנקודות a ו- b הוא $|b-a|$

$$f(t) = \mu([0,t])$$

המרחק בין הנקודות a ו- b הוא $|b-a|$

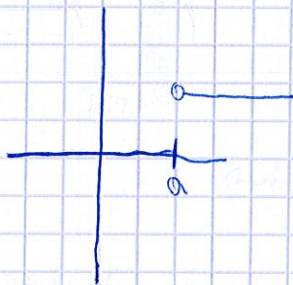
המרחק בין הנקודות a ו- b הוא $|b-a|$

המרחק בין הנקודות a ו- b הוא $|b-a|$

$$f(t) = t$$

$$\mu([a,b]) = b - a$$

המרחק בין הנקודות a ו- b הוא $|b-a|$



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ 1 & t > a \end{cases}$$

$$\mu_f([a,b]) = \begin{cases} 1 & a < b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\delta_a(b)$$

המרחק בין הנקודות a ו- b הוא $|b-a|$

$$\mu_f([a,b]) = f(b) - f(a)$$

$$= \int_a^b f'(t) dt$$

$$0 \leq w(t) = f'(t)$$

$$\mu_f([a,b]) = \int_a^b w$$

$$\mu_f(A) = \int_A w$$

מסלול קטן

כנסו $k \in [0, 1]$: f_k

$$k = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} ; a_i \in \{0, 2\}$$

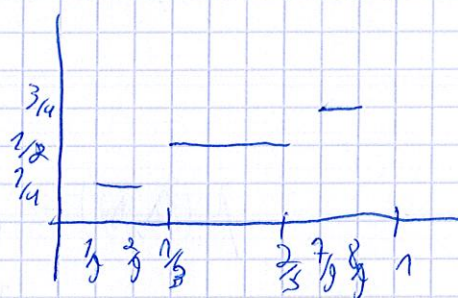
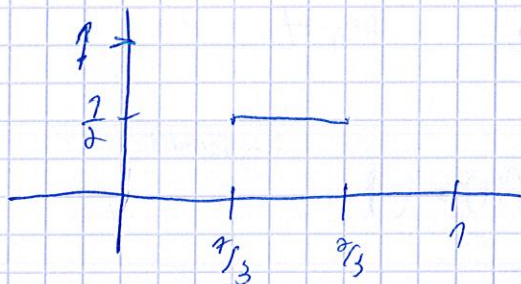
הצגת f_k כפונקציה של k

פונקציה $f_k : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

$f_k(0) = 0$

$f_k(1) = 1$

הצגת f_k כפונקציה של k



הפונקציה f_k היא פונקציה של k ושל x

~~הפונקציה f_k היא פונקציה של k ושל x~~

~~הפונקציה f_k היא פונקציה של k ושל x~~

הפונקציה f_k היא פונקציה של k ושל x

$f_k(1) = 1$ $f_k(0) = 0$

$f'_k(x) = 0$ $x \in [0, 1]$

הפונקציה f_k היא פונקציה של k ושל x

הפונקציה f_k היא פונקציה של k ושל x

$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$ $x \in [0, 1]$

$f\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$

הפונקציה f_k היא פונקציה של k ושל x

$$f(x) = \sup_{\substack{y \leq x \\ y \in K}} f(y)$$

$$f(x) = \inf_{\substack{y \geq x \\ y \in K}} f(y)$$

כל $x \in K$ נכון

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{נכון}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

0.0222...

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

0.2000...

$$f_K(x)$$

קטן, קטן, קטן
קטן, קטן, קטן

$$N_{f_K}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}$$

$$N_{f_K}\left(\left[0, \frac{3}{5}\right)\right) = \frac{1}{2}$$

$$N_{f_K}(1) = 0$$

קטן, קטן, קטן

$$N_{f_K}(K) = 1$$

כל $x \in K$ נכון

כל $x \in K$ נכון

כל $x \in K$ נכון

כל $x \in K$ נכון

כל $x \in K$ נכון

כל $x \in K$ נכון

כל $x \in K$ נכון

כל $x \in K$ נכון

$$1_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

כל $x \in K$ נכון

$$\int_R 1_A = m(A)$$

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ התצורה הקבוצה המרחב
 $t \in \mathbb{R}$ המרחב המרחב המרחב

$$\{f < t\} = \{x \in \Omega \mid f(x) < t\}$$

(א) התצורה הקבוצה המרחב
 $t \leq 0$ הקבוצה המרחב המרחב

(ב) התצורה הקבוצה המרחב
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ הקבוצה המרחב

$$\{f < t\} = f^{-1}((-\infty, t))$$

(ג) התצורה הקבוצה המרחב
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ הקבוצה המרחב

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} = 1_{\mathbb{Q}}$$

(ד) התצורה הקבוצה המרחב
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ הקבוצה המרחב

(ה) התצורה הקבוצה המרחב
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ הקבוצה המרחב

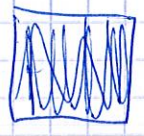
(ו) התצורה הקבוצה המרחב
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ הקבוצה המרחב

$$\{f \geq t\} = \{f < t\}^c$$

$$\{f \leq t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f < t + \frac{1}{n}\}$$

$$\{f > t\} = \{f \leq t\}^c$$

$$\{f = t\} = \{f \leq t\} \cap \{f \geq t\}$$



הפונקציה $f^{-1}(A)$ היא $A \subseteq \mathbb{R}$ שבה $x \in A$ אם ורק אם $f(x) \in A$

הפונקציה f היא מונוטונית

הפונקציה $f+g$ היא מונוטונית אם f ו- g מונוטוניות
 הפונקציה f היא מונוטונית אם $f(x) \leq f(y)$ לכל $x < y$

$$\{x \mid f(x) \leq t\} = \{x \mid f(x) \leq \frac{t}{2}\}$$

$$\{x \mid f(x) < t\} = \{x \mid f(x) > \frac{t}{2}\}$$

הפונקציה f היא מונוטונית אם $f(x) \leq f(y)$ לכל $x < y$

הפונקציה $f+g$ היא מונוטונית אם f ו- g מונוטוניות

$$\{f+g \leq t\} = \bigcup_{\substack{r,s \in \mathbb{Q} \\ r+s \leq t}} \{f \leq r\} \cap \{g \leq s\}$$

$$\{x \mid f(x) \leq r\} \cap \{x \mid g(x) \leq s\} \subseteq \{x \mid (f+g)(x) \leq r+s\}$$

$$f(x) + g(x) \leq t$$

$$\{x \mid f(x) \leq r\} \cap \{x \mid g(x) \leq s\} \subseteq \{x \mid f(x) + g(x) \leq r+s\}$$

$$\{x \mid f(x) \leq r\} \cap \{x \mid g(x) \leq s\} \subseteq \{x \mid f(x) + g(x) \leq r+s\}$$

$$\{x \mid f(x) \leq r\} \cap \{x \mid g(x) \leq s\} \subseteq \{x \mid f(x) + g(x) \leq r+s\}$$

$$\{x \mid f(x) \leq r\} \cap \{x \mid g(x) \leq s\} \subseteq \{x \mid f(x) + g(x) \leq r+s\}$$

$$\{x \mid f(x) \leq r\} \cap \{x \mid g(x) \leq s\} \subseteq \{x \mid f(x) + g(x) \leq r+s\}$$

$$\{f^2 \leq t\} = \begin{cases} \emptyset & t < 0 \\ \{x \mid f(x) \leq \sqrt{t}\} \cap \{x \mid f(x) \geq -\sqrt{t}\} & t \geq 0 \end{cases}$$

~ 2.5

MC : 8/5/20

۱۹۳۷

602W

(1)

12

(2)

14

१८

555

ה'תשנ"ה

$\sqrt{c}$

1255

(2) $1'558u$

1. $10 \times 10 \times 10$

$$t \in \mathbb{Q}$$

2. 2021

150 ~ 200

75

$$\{f < t\}$$

$$p \rightarrow \text{no. of } p, n$$

$$\frac{(w, v)}{t \in \mathbb{R}}$$

8

$$\{f \leq t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \leq t\}$$

$$\{f < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f \leq t - \frac{1}{n}\}$$

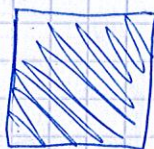
$$\inf_n f_n(x) = \sup \{ -f_n(x) \}$$

(2)

$$h = \lim_{h \rightarrow \infty} \sup f_h$$

$$\{f \leq t\}$$

$$h(x) = \lim_{h \rightarrow \infty} \sup \left(\inf_n \left(\sup_{m \geq h} f_m(x) \right) \right)$$



$$\liminf = \sup_N \left(\inf_{h \geq N} (f_h(x)) \right)$$

$$(\text{no. of } \omega \in \Omega)$$

$$\text{no. of } \omega \in \Omega \text{ such that } \dots$$

$$\text{no. of } \omega \in \Omega$$

$$f_1, f_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f = \limsup f_n$$

$$f = \limsup f_n$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\dots$$

μ is a measure on $(\Omega, \mathcal{F})$ with $\mu(\Omega) < \infty$.
 $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ are measurable functions.

$f \sim g$ (a.e.) means $\mu(\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

$$\mu\left(\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}\right) = 0$$

μ is a measure on $(\Omega, \mathcal{F})$ with $\mu(\Omega) < \infty$.
 $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ are measurable functions.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ is a measure space. $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ are measurable functions.

$$A = \{f \neq g\}$$

$$\{g < t\} = (\{f < t\} \cup B_t) \setminus C_t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$B_t = \{g < t\} \setminus \{f < t\}, \quad A \supseteq B_t \cup C_t$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ is a measure space. B_t, C_t are measurable sets.

$$\mu(\{g < t\}) \leq \mu(\{f < t\}) + \mu(B_t)$$

$$\{g < t\} = (\{f < t\} \cap A^c) \cup (A \cap \{g < t\})$$

$f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ are measurable functions.

$f_n \rightarrow f$ a.e. means $\mu(\{x \in \Omega : f_n(x) \neq f(x)\}) = 0$.

$f_n \rightarrow f$ a.e. means $\mu(\{x \in \Omega : f_n(x) \neq f(x)\}) = 0$.

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup f_n$$

$f_n \rightarrow f$ a.e. means $\mu(\{x \in \Omega : f_n(x) \neq f(x)\}) = 0$.

$$\mu(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0 \quad \sim \text{IIR}$$

$n \in \mathbb{N}$ $\vec{n} \in \mathbb{N}^n$ $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ $e \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $f, f_1, f_2, \dots: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$\sqrt{3} \sim f$ $\sqrt{5} \sim f$ $f_n \rightarrow f$ $\sqrt{3} \sim f$ N_0 $N(n, 1)$

$$f \stackrel{a.e.}{=} \limsup f_n \quad \checkmark_{f \leq g}$$

Ex 8.8, $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ w.p. (Volterra) $x \mapsto x$

המשפט של פאפה: f' הוא פונקציה רציפה

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\gamma \beta' \beta \omega \quad f'$

(1/5/18) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  $\rightarrow$ $\lim_{h \rightarrow 0}$ $\rightarrow$ $\lim_{h \rightarrow 0}$



$\sim 10^3$ f_h 's/o $f_h(x)$ / max

~~12/2/21~~
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{dod} \quad \text{GWS 1}$$
$$\text{N} \rightarrow \text{N} \quad \text{G} \rightarrow \text{G} \quad f_h \xrightarrow{\alpha_R} f' \quad | \rightarrow 0$$

for $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ we have $f' \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$$

$$f_1, f_2, f_3, \dots: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mu(\Omega) < \infty$$

given

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \quad \text{is} \quad f_n \sim f \quad \text{is} \quad \text{not} \quad \text{true}$$

$$\mu \left(\left\{ x \mid \left| f_n(x) - f(x) \right| \geq \varepsilon \right\} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$A_n = \left\{ x \mid \forall k \geq n \mid f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon \right\}$$

$$\left\{ x \mid \left| f_n(x) - f(x) \right| \geq \varepsilon \right\} \subseteq A_n^c$$

$$\mu(A_n^c) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\textcircled{*} \mu(A_n) \rightarrow \mu(\Omega)$$

$$\left\{ x \mid f_n(x) \rightarrow f(x) \right\} = \tilde{\Omega} \subseteq \Omega$$

$$\mu(\Omega) = \mu(\tilde{\Omega})$$

$$A_n \nearrow \tilde{\Omega}$$

⊗

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad x \in \tilde{\Omega}$$

$$x \in \tilde{\Omega} \Rightarrow \exists A_n \nearrow \tilde{\Omega}$$

$$\forall k \geq N$$

$$\left| f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

$$x \in A_N$$

$$A_N \nearrow \tilde{\Omega}$$

$$\tilde{\Omega} = \bigcup_{N=1}^{\infty} A_N$$

$$\mu(\Omega) < \infty$$

$$0 \leq f_n \leq 1$$

$$f_n$$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x > n \\ 0 & x < n \end{cases}$$

$$\mu \left(\left\{ x \mid \left| f_n(x) - 0 \right| \geq \frac{1}{2} \right\} \right) = \mu([n, \infty)) = \infty$$

$\forall x \in A \rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$$\exists n, \forall x \in A_n \rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\forall n, \forall x \in A_n \rightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

נרמז: $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$

$$A_1, A_2, \dots \subseteq \Omega$$

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right)$$

$$x \in A \iff \forall n \exists k \geq n \text{ such that } x \in A_k$$

$$B = \bigcup_{N=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=N}^{\infty} A_k \right)$$

$$x \in B \iff \exists N \text{ such that } \forall k \geq N, x \in A_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < \infty$$

$$\mu \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right) = 0$$

נרמז: $\mu(A) = 0$

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right)$$

$$\mu(A) \leq \mu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$f_n \xrightarrow{(M)} f \quad \mu(\Omega) < \infty \quad \text{now}$$

$$\text{now } f_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f \quad \text{e.g. } \text{now } \text{now } \text{now}$$

$$\mu \left(\left\{ x ; |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2} \right\} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{now}$$

$$n \geq n_1 \quad \text{e.g. } \text{now } n_1 \quad \text{now} \quad \mu \left(\left\{ x ; |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2} \right\} \right) < \frac{1}{2}$$

$$n \geq n_2 \quad \text{e.g. } \text{now } n_2 \quad \text{now} \quad \mu \left(\left\{ x ; |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{4} \right\} \right) < \frac{1}{4}$$

$$\text{now } \text{e.g. } \text{now } n_k \geq n_{k-1} \quad \text{now} \quad \mu \left(\left\{ x ; |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2^k} \right\} \right) < \frac{1}{2^k}$$

$$A_k = \left\{ x ; |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2^k} \right\} \quad \text{now}$$

$$\mu(A_k) \leq \frac{1}{2^k} \quad \text{now} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < \infty$$

$$\mu(A) = 0 \quad \text{now} \quad A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{now}$$

$$\forall x \in A \quad f_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f \quad \text{now}$$

$$x \notin \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k \quad \text{e.g. } \text{now } N \quad \text{now} \quad x \in A \quad \text{now}$$

$$k \geq N \quad \text{e.g. } \text{now} \quad x \in \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k^c \quad \text{now}$$

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{2^k}$$

$$f_{n_k}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{now}$$

המשפט הראשון

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{כך שכל } f \text{ המקיימת } |f(x) - f(y)| < \delta \text{ עבור } |x - y| < \epsilon \quad (1)$$

$$\text{כלומר } f \text{ היא פונקציה רציפה בנקודה } x_0 \quad (2)$$

$$0 < \epsilon \quad \exists \delta > 0 \quad f_h \rightarrow f \quad \text{על } (EgothV) \text{ כלומר}$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad A \subseteq \Omega \quad \text{כך שכל } f \text{ המקיימת } |f(x) - f(y)| < \delta \text{ עבור } |x - y| < \epsilon$$

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(Luzin) / כלומר

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{כלומר}$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad A \subseteq [a, b] \quad \text{כך שכל } f \text{ המקיימת } |f(x) - f(y)| < \delta \text{ עבור } |x - y| < \epsilon$$

$$m(A^c) < \epsilon$$

$$f|_A \quad \text{כלומר } f \text{ היא פונקציה רציפה בנקודה } x_0$$

233N 168 23/7, 183N A e 1102

11/23

3

$\sim \log N$

$$\mathbb{Q} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{breg.}$$

۱۳۳۷

(1) μ_1

(2)

١٣٤٧

1. 25/5/20

~~Handwritten scribbles~~
15/52

733W 15 11C

n

510

33N 33N

6860

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$m_f$$

۵۶۷

$$f = \text{id}$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

$$f(x) \sim x^2$$

V + 70

1.2.1 $f(x) = \log(x)$ 131 $\therefore \frac{1}{x}$

$$\hat{\mu}_f = \mu(tA) \quad 1, 3, 4 \quad t > 0, 1, 2, 3$$

9 1115

$\therefore \text{Area} = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 50 \text{ cm}^2$

১৩৩২

$\sim 1/2$ - C 1. also $\mu(K) = \mu(R) = 1$ $\sim 1/2$

צורה 35. מלך נחמד
המלך נחמד

ש"ס חג ה'תש"ס

۱/۶-۱/۷

1321

$$M_{f_n} \quad 132$$

הַיְיטוּת הַמִּשְׁפָּחָה הַיְיטוּת הַמִּשְׁפָּחָה

$$f_n \xrightarrow{u} f \quad \text{p. 1105}$$

$$f_n(x) = \frac{\frac{1}{x}}{A_n} + \frac{1}{A_n^2} \approx O(2^{-n})$$

$$|2a_n - a_{n+1}| \leq 1$$

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \left| \frac{a_{n+1}(x)}{2^{n+1}} - \frac{a_n(x)}{2^n} \right| + O(2^{-n}) \leq O(2^{-n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$f_n \rightarrow f$$

$$\mu(A_n) = 1 \quad \mu(C) = 1 \quad \mu(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 1$$

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

