(1) ממשי״ל הרצאות 3.7

משפט $A,B\subseteq\Omega$ מדידות זרות

אזי $m^*(A\cup B)=m^*(A)+m^*(B)$

(הערה: לא קיימת מחלקה יותר גדולה של מדידות עבורה מתקיים כל ה *)

הוכחה

יהי $\varepsilon>0$. מכיוון ש A,B מדידות קיימות $A_\varepsilon,B_\varepsilon\subseteq\Omega$ אלמנטריות

כך ש $m^*(A\Delta A_\varepsilon)\le\varepsilon$ $m^*(B\Delta B_\varepsilon)\le\varepsilon$

כיוון שנרצה להשתמש באדיטיביות של m עבור אלמנטריות נשים לב

שלמרות ש $\emptyset=A\cap B$ ייתכן ש $A_\varepsilon\cap B_\varepsilon\neq\emptyset$

נראה ש $A_\varepsilon\cap B_\varepsilon$ לא גדול מדי:

בגלל ש $A\cap B=\emptyset$ מתקיים $A_\varepsilon\cap B_\varepsilon\subseteq(A_\varepsilon\setminus A)\cup(B_\varepsilon\setminus B)$

$$m^*(A_\varepsilon\cap B_\varepsilon)\le m^*(A_\varepsilon\setminus A)+m^*(B_\varepsilon\setminus B)<2\varepsilon$$

נשתמש באדיטיביות הסופית של אלמנטריות:

$$m(A_\varepsilon\cup B_\varepsilon)=m(A_\varepsilon)+m(B_\varepsilon)-\underbrace{m(A_\varepsilon\cap B_\varepsilon)}_{\text{קטן מ } 2\varepsilon}$$

סימון x,y ו- ε נסמן $x\overset{(\varepsilon)}{\sim}y\iff|x-y|<\varepsilon$

$$m(A_\varepsilon\cup B_\varepsilon)\overset{(2\varepsilon)}{\sim}m(A_\varepsilon)+m(B_\varepsilon)\qquad (*_1)$$

בנוסף $m^*((A\cup B)\Delta(A_\varepsilon\cup B_\varepsilon))\le m^*((A\Delta A_\varepsilon)\cup(B\Delta B_\varepsilon))\le 2\varepsilon$

$(*_2)$ לכן $m^*(A\cup B)\overset{2\varepsilon}{\sim}m^*(A_\varepsilon\cup B_\varepsilon)$

למה מתקיים לכל A,B - $|m^*(A)-m^*(B)|\le m^*(A\Delta B)$ (m^* היא פסאודו-...)

הוכחה: $A\subseteq B\cup(B\Delta A)\Rightarrow m^*(A)\le m^*(B)+m^*(A\Delta B)$

$B\subseteq A\cup(A\Delta B)\Rightarrow m^*(B)\le m^*(A)+m^*(A\Delta B)\Rightarrow|m^*(A)-m^*(B)|\le m^*(A\Delta B)$

סוף מה יש לנו?

$$m^*(B) \overset{(\varepsilon)}{\sim} m^*(B_\varepsilon) \qquad m^*(A) \overset{(\varepsilon)}{\sim} m^*(A_\varepsilon)$$

$$m(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \overset{(2\varepsilon)}{\sim} m(A_\varepsilon) + m^*(B_\varepsilon) \qquad *_1$$

$$m^*(A \cup B) \overset{(2\varepsilon)}{\sim} m(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \qquad *_2$$

וסך הכל

$$m^*(A\cup B) \overset{(2\varepsilon)}{\sim} m^*(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \overset{(2\varepsilon)}{\sim} m(A_\varepsilon) + m(B_\varepsilon) \overset{(2\varepsilon)}{\sim} m(A) + m(B)$$

וסך הכל

$$m^*(A\cup B) \overset{(6\varepsilon)}{\sim} m(A) + m(B)$$

ו- כיוון ש- $A_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ סופית־אלמנטרית ומקיימת

$$*_2 \qquad m^*((A\cup B) \triangle (A_\varepsilon \cup B_\varepsilon)) < 2\varepsilon$$

ובפרט $A \cup B$ מדידה,

ולכן

$$\boxed{m(A\cup B) = m(A) + m(B)}$$

ⓐ הוכחה 3.1 נכונה ממשיך

משפט $A,B\subseteq\Omega$ מוגדר זרות אזי $m^*(A\cup B)=m^*(A)+m^*(B)$

~~נכון~~ כלומר אדיטיביות סופית של מידה צריך להוכיח [illegible].

יש לנו $m^*(A)\overset{\varepsilon}{\approx}m^*(A_\varepsilon)$ $\quad m^*(B)\overset{(\varepsilon)}{\approx}m^*(B_\varepsilon)$

כי A ו-B זרות. $\to m^*(A_\varepsilon\cap B_\varepsilon)\le m^*(A_\varepsilon\setminus A)+m^*(B_\varepsilon\setminus B)<2\varepsilon$

$m^*((A\cup B)\triangle(A_\varepsilon\cup B_\varepsilon))<2\varepsilon$

$m^*(A\cup B)\overset{(2\varepsilon)}{\approx}m^*(A_\varepsilon\cup B_\varepsilon)$

$m^*(A_\varepsilon\cup B_\varepsilon)\le m(A_\varepsilon)+m(B_\varepsilon)+2\varepsilon$

*[illegible]

$|m^*(A)-m^*(B)|\le m^*(A\triangle B)$

הוכחה m^* [illegible]

$A\subseteq B\cup A\setminus B\subseteq B\cup B\triangle A$

~~$B\subseteq A\cup B\setminus A$~~

$m^*(A)\le m^*(B)+m^*(A\triangle B)$

מסקנה של (משפט) - אדיטיביות סופית של מידה צריך להוכיח [illegible].

ד) $A,B\subseteq\Omega$ מדידות אזי

$$m(A\cup B)=m(A)+m(B)-m(A\cap B)$$

הוכחה -

$$m(A\cup B)=m(A\setminus B)+m(A\cap B)+m(B\setminus A)=$$ מדידות

מחסר ומוסיף $m(A\cap B)$

2) $A_1,\dots,A_N$ מדידות זרות

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{N}A_i\right)=\sum_{i=1}^{N}m(A_i)$$

באינדוקציה

סופיות של כל אדיטיביות של קבוצות מדידות $\to m^*=m$

[illegible]

בוחן!

משפט - נניח $A_1, A_2 \ldots$ קבוצות מדידות

אז 1) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ היא קבוצה מדידה

2) אם $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ זרות בזוגות

אז מתקיים $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$

כלומר σ-אדיטיביות של מידה לגבי קבוצות מדידות

הוכחה:

שלב א' רדוקציה למקרה בו הקבוצות זרות

נסמן $B_1 = A_1$

$$B_N = A_N \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{N-1})$$

B_i מדידה כי הקבוצות המדידות הן אלגברה. ניתן לעשות איחודים/חיתוכים סופיים

בנוסף מתקיים $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

כי מתקיים לכל N $\bigcup_{i=1}^{N} A_i = \bigcup_{i=1}^{N} B_i$

מספיק להוכיח $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ מדידה וכן לגבי 1)

כאשר B_i זרות מהגדרה.

שלב ב' נניח להוכיח כאשר $A_1, A_2 \ldots$ זרות בזוגות

לכל $n \in \mathbb{N}$ $m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$ (מה שהוכחנו לגבי אדיטיביות סופית)

$\infty > m(\Omega) \geq$

מסקנה - $\sum_{i=1}^{n} m(A_i) \leq m(\Omega)$ מספר

לכן הטור (בעל איברים אי-שליליים) חסום ומתכנס!

$\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) < \infty$ ולא רק זה כי $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) \leq m(\Omega)$

(3) לכן לכל $0<\varepsilon$ קיים N_ε כך ש $\sum_{i=N_\varepsilon}^{\infty} m(A_i) < \varepsilon$

ולכן, מתוך σ-סאבאדיטיביות של מידה חיצונית

$$m^*\left(\bigcup_{i=N_\varepsilon}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=N_\varepsilon}^{\infty} m(A_i) < \varepsilon$$

סעיף ג'

נוכיח ש האיחוד $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ מדידה

~~יהי $0<\varepsilon$ לכל i קיים $A_i^\varepsilon \in D$ אלמנטרית~~

~~כך ש $m^*(A_i \Delta A_i^\varepsilon) \le \frac{\varepsilon}{N_\varepsilon}$ כאשר אלמנטרית של... נסמן $A_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} A_i^\varepsilon$~~

~~$m^*\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i\right) \Delta A_\varepsilon\right) \le m^*\left(\bigcup_{n=N_\varepsilon}^{\infty} A_i\right) + m^*\left(\left(\bigcup_{n=1}^{N_\varepsilon} A_i\right) \Delta \bigcup_{i=1}\right.$~~

יהי $\varepsilon>0$. לפי ב' יש N_ε כך ש

$$m^*\left(\bigcup_{i=N_\varepsilon+1}^{\infty} A_i\right) < \varepsilon$$

נסמן $B = \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} A_i$ זו מדידה כאיחוד סופי של מדידות

לכן יש אלמנטרית $B_\varepsilon \subseteq \Omega$ כך ש

$$m^*(B \Delta B_\varepsilon) < \varepsilon$$

וכעת

תת-אדיטיביות כרגיל.

$$m^*\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \Delta B_\varepsilon\right) \le m^*\left(\bigcup_{i=N_\varepsilon+1}^{\infty} A_i\right) + m^*(B \Delta B_\varepsilon) <$$

$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

הראנו לכל ש $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ יש אלמנטרית קרובה

ולכן מדידה, לכן היא מדידה. סיימנו את ההוכחה (1)

סעיף 3)

נוכיח את ② כלומר ש $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$

תחת סיגמא אדיטיבית :

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i) < \infty$$

לכיוון השני :

לכל n

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \supseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

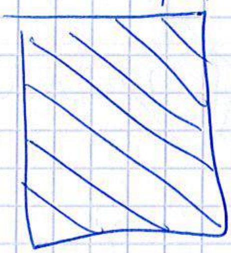
$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \underset{\text{מונוטוניות}}{\ge} m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \underset{\text{אדיטיביות סופית}}{=} \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

לכל n

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \ge \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

ניקח גבול/ sup ונקבל

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \ge \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$



ולכן $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$

קיבלנו σ-אדיטיביות של m עבור קבוצות מדידות.

הגדרה [σ-אלגברה] ~ תהי Ω, קב' $F \subseteq P(\Omega)$ אוסף של קבוצות של Ω

נאמר ש F היא σ-אלגברה אם

1) $\emptyset \in F$, 2) $A \in F \Rightarrow \Omega \setminus A = A^c \in F$

3) ~~[illegible]~~ $A_1, A_2 \ldots \in F \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$

אלגברה סגורה לאיחודים סופיים בפרט.

כלומר σ-אלגברה סגורה לאיחודים (וחיתוכים) בני מניה.

המשפט שנוכיח ש $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ מלבן אלמנטרי

אוסף הקבוצות המדידות לכל Ω הוא σ-אלגברה.

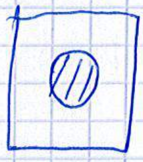
ובנוסף, m - מידה לכל היותר σ-אדיטיבית -

אם $A_1, A_2 \ldots \subseteq \Omega$ מדידות זרות אז המידה של האיחוד

היא סכום המידות.

(4)

דוגמאות לקבוצה מדידה

ה)  עיגול ~~$B(0,r)$~~ הוא מדיד

B מספיק, להראות ש $B(0,r)$ כאיחוד בן מניה של אלמנטריות
למשל איחוד של כל המלבנים הרציונליים שמוכלים בפנים.

באופן כללי - כל קבוצה פתוחה ב $\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$ ($\mathbb{R}^n$) היא
מדידה לבג

ניקח את כל התיבות הרציונליות שמוכלות ב A - כיוון
ש A פתוחה היא שווה לאיחוד הזה; מספיק לכל נק'
יש סביבה, וגם יש מלבן רציונלי.

רעיון הבנייה -

להגדיר מ Ω

מה לעשות במלבן האינסופי Ω ?

א) אם A מדידה ביחס ל Ω_1 ~~Ω~~
ו- $A\subseteq\Omega_2$ אזי A מדידה גם ב Ω_2

ב) המידה של A, $m(A)$, לא תלויה במלבן ~~...~~ האינסופי

כעת לכל Σ - הגדרנו $m^*(A) =: m(A)$ וכך אין תלות
במלבן (האינסופי).

כעת לכל n - ניקח אלמנטרית שמכילה את A ב Ω_n
נמתין עד Ω_2 והיא תהיה קירוב (טופולוגי ...).

ו) הגדרה זהה לכל קבוצה לא חסומה
שים לב: יש קבוצה לא חסומה ממידה סופית.

כמו למשל $[0,1]^2\cup\mathbb{Q}$

$$\left\{(x,y)\ \middle|\ \begin{array}{l} x\geq 0 \\ 0\leq y\leq \frac{1}{1+x^2}\end{array}\right\}$$ או

במקרה לבדוק רק מלבן אינסופי $\Omega=[0,1]^d$

צריך עם המשך במספר בן מניה את הפנים של Ω
לא צריך אינסופי

נניח ש $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ כאשר האיחוד זר ו Ω_n מלבנים
חצי פתוחים לפשט (הריבוע הסטנדרטי).

הגדרה - קבוצה ב $\mathbb{R}^2$ תקרא מדידה ~~אם~~ לבג
אם לכל n $A\cap\Omega_n$ מדידה ביחס ל Ω_n
ונגדיר את המידה של A להיות $m(A)=\sum_{n=1}^{\infty} m(A\cap\Omega_n)$

~~אזי A מדידה~~

תרגיל - למה מידה לא תלויה בחלוקה הנבחרת
של $\mathbb{R}^n$ ~~ל~~למלבנים חצי פתוחים

<u>משפט</u> - אוסף הקבוצות המדידות כאשר
מהווה σ אלגברה ואם $A_1,A_2,\ldots\subseteq\mathbb{R}^2$
מדידות ~~סופיות~~ זרות אז

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

הערה. גם מידה שונה בחירה פירוק קרוב של $\biguplus_{n=1}^{\infty}\Omega_n = \mathbb{R}^2$

הוכחת המשפט - $\emptyset$ מדידה ✓

נניח A מדידה ב $\mathbb{R}^2$

לכן $\mathbb{R}^2\setminus A$ מדידה כי לכל n הקבוצה
$A\cap\Omega_n$ מדידה ולכן גם $\Omega_n\setminus A$ מדידה
ולכן $\mathbb{R}^2\setminus A = \dot\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n\setminus A$ מדידה

למה סגור ל איחודים בני מניה:

$A_1,A_2,\ldots\subseteq\mathbb{R}^2$ מדידות

$$\forall n \qquad \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right)\cap\Omega_n = \underbrace{\bigcup_{m=1}^{\infty}(A_m\cap\Omega_n)}_{\text{מדידות ב } \Omega_n}$$

נשאר להוכיח ש m σ אדיטיבית -

$A_1,A_2,\ldots\subseteq\mathbb{R}^2$ זרות (ומדידות)

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\cap\Omega_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\cap\Omega_n\right) \underset{\sigma\text{-אדיטיביות ב } \Omega_n}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i\cap\Omega_n)\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

החלפת סדר סכימה כי חיוביים

טענה תהי $A \subseteq \mathbb{R}^2$ **מדידה**

$$m^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A \cap \Omega_n)$$

ונניח שיש לנו סדרה של קופסאות זרות בזוגות, $\mathbb{R}^2 = \bigcup \Omega_n$

הוכחה - כיוון $\leq$:

$$A \subseteq \bigcup A \cap \Omega_n$$

ומתת אדיטיביות של m^*

$$m^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A \cap \Omega_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A \cap \Omega_n)$$

כיוון $\geq$:

מספיק, לכל טבעי N

$$m^*(A) \geq \sum_{n=1}^{N} m(A \cap \Omega_n)$$

נקבע N נגדיר מלבן מינימלי $\Omega \supseteq \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_N$

$$m^*(A) \geq m^*(\underbrace{A \cap \Omega}_{\text{מדידות } \Omega}) = m(A \cap \Omega) \overset{\text{זרות}}{\geq} m\left(\bigcup_{n=1}^{N} A \cap \Omega_n\right) = \sum_{n=1}^{N} m(A \cap \Omega_n)$$

כנדרש $\blacksquare$

ממשיכים הרצאה 3.2

נכסה את $\mathbb{R}^2$ ע"י איחוד זר של ריבועי ~~יחידה~~ יחידה Ω_n

$A\subseteq \mathbb{R}^2$ מדידה אם

$A\cap\Omega_n \quad \forall n$ מדידה ב Ω_n

אם $A\subseteq \mathbb{R}$ מדידה המידה שלה

$m(A)=m^*(A)$

וזו מידה לכל

אוסף הקבוצות המדידות ב $\mathbb{R}^2$ הוא σ אלגברה.

סגור למשלים / לאיחוד/חיתוך בן מנייה

מידה לכן היא σ אדיטיבית: $A_i\subseteq \mathbb{R}^2$ מדידות וזרות.

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

שימו ♥, תכונה נוספת $A,B\subseteq\mathbb{R}^2$ סופי שתי קבוצות כלשהן ~~[illegible]~~/מדידות

מתקיים $m(A\cup B)=m(A)+m(B)-m(A\cap B)$

דורשים כאן ש $m(A),m(B)<\infty$

אם

$m(A\cap B)=\infty$ אז נקבל של $\infty-\infty$ [illegible]

מה לה...

כדי שלא תהיה בעיה נכון: נכתוב

$$m(A\cup B)+m(A\cap B)=m(A)+m(B)$$

אילו קבוצות מדידות יש?

1. קב' בורליות.

2. קב' פתוחות ב $\mathbb{R}^2$ (ולכן גם סגורות)

3. קב' ממידה 0.

<u>דוגמא</u>

[illegible] של קבוצה פתוחה וצפופה:

$A=\bigcup_{n=1}^{\infty} B(q_n,\frac{1}{2^n}) \qquad \mathbb{Q}^2=\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$

למה $A \neq \mathbb{R}^d$? כי $m(B(x,r)) \le 4r^2$

הנפח שלו πr^2

ולכן המידה של A :

$$m(A) \le \sum_{i=1}^{\infty} m\left(B\left(q_i, \frac{1}{2^i}\right)\right) \le \pi \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2i}} < \infty$$

~~ולכן~~ ~~ולכן~~ ולעומת זאת $m(\mathbb{R}^2) = \infty$

הוכחנו כבר ש $m(A) = m^*(A)$ ולכן יש לנו תת-σ-אדיטיביות

$A \subseteq \bigcup A_i$ ולכן מתקיים, כי $m(A) \le \sum m(A_i)$

אז נגדיר

$$A_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} B\left(q_n, \frac{\varepsilon}{2^n}\right)$$

ומתקיים ש

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}}$$

היא בת מניה צפופה, ולסיכום כל קבוצה כזו

ומידתה 0 .

כלומר כל פתוח לא ריק אין מידה צריך להכיל אותו.

דרך Ω_n הגדולה,

אותנו מעניין הבסיס אין לה מידה

<u>משפט</u> קריטריון המדידות של לבג

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^d$ אזי A מדידה אם ורק אם

לכל $\varepsilon > 0$ קיימות $F, G \subseteq \mathbb{R}^d$ כך ש

1) G פתוחה ו- F סגורה

2) $F \subseteq A \subseteq G$

3) $m(G \setminus F) < \varepsilon$

הוכחה: [קירוב לפי מעטפת]

$\Rightarrow$ צ"ל ש A מדידה

יהי n ונסמן $\Omega=\Omega_n$ וצ"ל ש $A\cap\Omega$ מדידה.

ויהי $\varepsilon>0$ תהיינה F,G G פתוחה סגור מדידות, $\Omega\cap G$ מדידה, כך ש $\Omega\cap F$

ויהי צריך לבנות קירוב אלמנטרי ל $A\cap\Omega$

נסמן קיים $G_\varepsilon \subseteq \Omega$, אלמנטרית שמקיימת את

$m^*((G\cap\Omega)\Delta G_\varepsilon)<\varepsilon$: $G\cap\Omega$ ~~$F\cap\Omega$~~

נראה שזה קירוב של $A\cap\Omega$ עם G_ε

$$m^*(G\setminus A)\le m(G\setminus F)<\varepsilon$$

$$m^*((G\cap\Omega)\setminus(A\cap\Omega))<\varepsilon$$

$$m^*((A\cap\Omega)\Delta G_\varepsilon)\underset{\Delta \text{ א"ש}}{\le} \underbrace{m^*((A\cap\Omega)\Delta(G\cap\Omega))}_{<\varepsilon}+\underbrace{m((G\cap\Omega)\Delta G_\varepsilon)}_{<\varepsilon}$$

$\Leftarrow$ נניח ש A מדידה. יהי $\varepsilon>0$ נרצה וקיים

פתוחה $A\subseteq G$ כך ש $m(G\setminus A)<\varepsilon$

נסמן עבור n $A\cap\Omega_n$ מדידה,

מהגדרת המידה החיצונית יש מלבנים אלמנטריים $P_{n,i}\subseteq\mathbb{R}^d$

כך ש $A\cap\Omega_n\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}P_{n,i}$

$$\sum_{i=1}^{\infty}m(P_{n,i})\le m(A\cap\Omega_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}$$

משיקולי רציפות אפשר להגדיל את המלבנים ולקבל

שבכל פעם הם פתוחים ש $A\cap\Omega_n\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}P^0_{n,i}$

מכיוון ש A מדידה, נשתמש ב~~...~~ תכונות של m

$$m\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}P_{n,i}\right)\setminus(A\cap\Omega)\right)\overset{\text{אדיטיביות}}{=}m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}P_{n,i}\right)-m(A\cap\Omega_n)\le$$

$$\underset{\sigma\text{-אדיטיביות}}{\le}\sum_{i=1}^{\infty}m(P_{n,i})-m(A\cap\Omega_n)$$

ולכן $m\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} P_{n,i}\right)\setminus (A\cap\Omega_n)\right)\le \frac{\varepsilon}{2^n}$

נגדיר $G=\bigcup_{i,n=1}^{\infty} P^{0}_{n,i}$ אזי לכל n

$A\cap\Omega_n \subseteq G$

ולכן $A\subseteq G$ ובנוסף G פתוחה כאיחוד של פתוחות

וגם

$$m(G\setminus A)\le m\left(\left(\bigcup_{i,n=1}^{\infty} P^{0}_{n,i}\right)\setminus A\right)\le \sum_{n=1}^{\infty} m\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} P^{0}_{n,i}\right)\setminus A\right)\le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} m\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} P_{n,i}\right)\setminus (A\cap\Omega_n)\right)\le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon$$

הוכחנו שמצאנו G פתוחה שמכילה את A כך ש
$m(G\setminus A)<\varepsilon$

כיוון ש- A^c מדידה, קיימת קבוצה פתוחה
$A^c\subseteq G_1$ כך ש $m(G_1\setminus A^c)<\varepsilon$

נגדיר את F סגורה $F=G_1^{c}$ סגורה F

מכיוון ש $A^c\subseteq G_1$ אז $F\subseteq A$

וגם

$$m(A\setminus F)=m(A\Delta F)\le m(A^c\Delta G_1)=m(G_1\setminus A^c)<\varepsilon$$

מצאנו סגורה מוכלת ב A כך ש $m(A\setminus F)<\varepsilon$

ולכן

$$m(G\setminus F)\underset{\text{אדיטיביות}}{=}m(G\setminus A)+m(A\setminus F)<\varepsilon$$

מסקנה: לכל $A\subseteq\mathbb{R}^d$ מדידה

$$m(A)=\inf\left\{m(G)\;\middle|\; \begin{array}{c} G \text{ פתוחה} \\ A\subseteq G\end{array}\right\}$$

$$m(A)=\sup\left\{m(F)\;\middle|\; \begin{array}{c} F \text{ סגורה} \\ F\subseteq A\end{array}\right\}$$

הגדרה - יהי $\varepsilon>0$ קיימת G ו F מקיימות כך ש

$m(G\setminus A)<\varepsilon$ $\quad$ $m(A\setminus F)<\varepsilon$

נניח $m(A) < \infty$ אזי $m(G) \leq m(A) + m(G \setminus A) \leq m(A) + \varepsilon$

ומצאנו G פתוחה שמכילה את A עם $m(G)$

קרוב כרצוננו ל $m(A)$

ואם $m(A) = \infty$ ניקח את $\mathbb{R}^2$

לפחות השני הוכחות דומה.

<u>הגדרה</u> קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^2$ נקראת G_δ

אם ניתן להציג כחיתוך בן מניה של פתוחות

ונקראת F_σ אם ניתן להציג כאיחוד בן מניה של סגורות.

תרגיל - כל קבוצה סגורה היא G_δ

" " פתוחה היא F_σ

נניח ש A היא G_δ אזי היא מדידה

נניח ש A היא F_σ אזי היא מדידה.

<u>משפט</u> אם A מדידה קיימות $F \subseteq A \subseteq G$

$$\begin{array}{ccc} F & \subseteq A \subseteq & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_\sigma & & G_\delta \end{array}$$

כך ש $m(G \setminus F) = 0$

<u>הוכחה</u> נשתמש בטענה הקודמת עבור $\varepsilon = \frac{1}{n}$

מקבלים $\underset{\text{סגורה}}{F_n} \subseteq A \subseteq \underset{\text{פתוחה}}{G_n}$

כך ש $m(G_n \setminus F_n) < \frac{1}{n}$ נגדיר עכשיו $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \supseteq A$ היא G_δ

$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq A$ היא F_σ

ואז $m(G \setminus F) < \varepsilon \quad \forall \varepsilon$

ולכן $m(G \setminus F) = 0$

27/10/13 הרצאה 3 ממשית

קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ נקראת מדידה

אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת קבוצה אלמנטרית E כך ש

$$m^*(A\Delta E)<\varepsilon$$

טענה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ מדידות וזרות אז $m^*(A\cup B)=m(A)+m(B)$

הגדרה

יהי $A\subseteq\mathbb{R}$ קב' מדידה וקטע I נגדיר

$$0\le d_A(I)=\frac{m(A\cap I)}{m(I)}\le 1$$

למה: תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ מדידה, $m(A)>0$

יהי $\lambda<1$, אזי קיים קטע I

כך ש $d_A(I)>\lambda$

הוכחה: נקבע $\varepsilon>0$

קיימת E אלמנטרית כך ש $m(E\Delta A)<\varepsilon\cdot m(A)$

$$m(A)=m(A\setminus E)+m(A\cap E)\underset{\substack{\text{מונוטוניות}\\ \text{המידה}}}{\le} m(A\Delta E)+m(A\cap E)<\varepsilon\cdot(m(A))+m(A\cap E)$$

$$(*)\quad m(A)<\frac{m(A\cap E)}{1-\varepsilon}$$

באותו אופן:

$$m(E)=m(E\cap A)+m(E\setminus A)<m(A\cap E)+\varepsilon\, m(A)$$

$$m(E)<\cancel{\frac{m(A\cap E)}{1-\varepsilon}}+\varepsilon\, m(A)\underset{(*)}{\le} m(A\cap E)+\varepsilon\cdot\frac{m(A\cap E)}{1-\varepsilon}=$$

$$=m(A\cap E)\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)\Rightarrow (1-\varepsilon)m(E)<m(A\cap E)$$

נסמן אז $E=\bigcup_{j=1}^{n} I_j$

כאשר E היא איחוד קטעים זרים כי קבוצה אלמנטרית.

$$(1-\varepsilon)\,m(E)=(1-\varepsilon)\cdot\sum_{j=1}^{n} m(I_j)$$

$$m(A\cap E)\underset{\text{אדיטיביות}}{=}\sum_{j=1}^{n} m(A\cap I_j)=\sum_{j=1}^{n}\frac{m(A\cap I_j)}{m(I_j)}\,m(I_j)$$

קיבלנו:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{m(A\cap I_j)}{m(I_j)} m(I_j) = m(A\cap E) > (1-\varepsilon)m(E) = \sum_{j=1}^{n} (1-\varepsilon) m(I_j)$$

לכן לפחות עבור j אחד מתקיים

$$\frac{m(A\cap I_j)}{m(I_j)} m(I_j) > (1-\varepsilon) m(I_j)$$

כלומר $d_A(I_j) > 1-\varepsilon$

נבחר $\varepsilon = 1-\lambda$

ונקבל סתירה להנחה.

כמסקנה מכך ניתן להראות שכל קבוצה מדידה היא
e' סגירות השלמה מכל אוסף סופי

<u>הגדרה</u> - עבור $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, $E_n \subseteq \mathbb{R}^d$

i) אם $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \dots$ נסמן $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_n$

ונסמן $E_n \searrow E$

ii) $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \dots$ נסמן $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_n$

ונסמן $E_n \nearrow E$

משפט - יהי E_n סדרת קבוצות מדידות ב-$\mathbb{R}^d$

א) אם $E_n \nearrow E$ אזי E מדידה

ו-$m(E_n) \nearrow m(E)$

בגמר ← ב) אם $E_n \searrow E$ ו-$m(E_1) < \infty$

אז E מדידה ו-$m(E_n) \searrow m(E)$

<u>פתרון</u> (1) E מדידה כאיחוד בן מניה של מדידות

ולכן מדידה.

נגדיר $G_1 = E_1$ ולכל $k \geq 2$ $G_k = E_k \setminus E_{k-1}$

אז $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ מדידות זרות, ובנוסף $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$

ממונוטוניות ו-σ אדיטיביות של המידה.

$$m(E) = m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\Big) \underset{\sigma\text{-אדיטיביות}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} m(G_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} m(G_n) = \lim_{N\to\infty} m(E_N)$$

לכן

$E_N = \bigcup_{i=1}^{N} G_N$

סימון: פונקציה מציינת (אינדיקטור / פונקציה אופיינית)

$$1_A(x) = \mathbb{1}_A(x) = \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x\in A \\ 0 & x\notin A \end{cases}$$

הגדרה: תהי סדרת קבוצות $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ ב-$\mathbb{R}^d$ ו-$E\subseteq\mathbb{R}^d$.

נאמר ש-$\{E_n\}$ מתכנסת נקודתית ל-E

אם $\{1_{E_n}\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית ל-1_E.

משפט: תהי $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ מדידות ב-$\mathbb{R}^d$ כך ש-$E_n\to E$.

אזי E מדידה ו-$m(E_n)\to m(E)$ אם*

$\boxed{\text{* אם קיימת } F\subseteq\mathbb{R}^d \text{ כך ש- } m(F)<\infty \text{ ו- } \forall n\ E_n\subseteq F}$

מטרה: הכללה של רציפות המידה לסדרות מתכנסות נקודתית כלליות.

(דוגמה נגדית: $E_n=[n,n+1]$, $E_n\to\emptyset$ נקודתית)

הוכחה: עבור x קבוע:

$$1_E(x) = \liminf 1_{E_n}(x) = \limsup 1_{E_n}(x)$$

$$\liminf 1_{E_n}(x) = \sup_{k\ge1}\inf_{n\ge k} 1_{E_n}(x) \qquad \limsup 1_{E_n}(x) = \inf_{k\ge1}\sup_{n\ge k} 1_{E_n}(x)$$

$$\sup_{n\ge k} 1_{E_n}(x) = 1_{\bigcup_{n\ge k}E_n}(x)$$

$$\inf_{n\ge k} 1_{E_n}(x) = 1_{\bigcap_{n\ge k}E_n}(x)$$

לכן

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n\ge k}E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n\ge k}E_n$$

סגורה לחיתוך ואיחוד בני מנייה ⇒ מדידה

$$A_k = \bigcap_{n\ge k}E_n \qquad B_k = \bigcup_{n\ge k}E_n$$

מונוטוניות: $A_k\subseteq E_k$, $B_k\supseteq E_k$

$$m(E) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k\right) \underset{\text{רציפות המידה}}{=} \lim_{k\to\infty} m(B_k) \ge \lim_{k\to\infty} m(E_k)$$