מושגים בקצרה 14.1

מיון מידות בורל סופיות מעל $I=[0,1]$

1) מידה רציפה בהחלט - μ רציפה בהחלט (AC)

אם לכל $A\subseteq I$

$$m(A)=0 \to \mu(A)=0$$

ראדון ניקודים שקול לכך של μ יש צפיפות -

כלומר יש $0\le f\in L_1([0,1])$ כך ש $\mu(A)=\int_A f\,dm$

יש התאמה בין מידה בורל סופית לפונקציה מונוטונית

ורציפה. משמאל ~~xxxx~~

$$\mu_F([a,b))=F(b)-F(a) \quad F$$

עולה / אולי / עכשיו

ה התאמה היא פונקציה למידה - $F(x)=\mu([0,x))$

כי ~~נתון~~ ~~רציפה~~ פונק' לא יורדת ורציפה משמאל:

$$\lim_{x\to b^-}F(x)=\lim_{x\to b^-}\mu([0,x))=\mu\Big(\bigcup_{x<b}[0,x)\Big)=\mu([0,b))=F(b)$$

"ההפך" מידה רציפה בהחלט:

מידה סינגולרית - מידה נקראת סינגולרית

אם קיימת $A\subseteq I$ בורל כך ש $\mu(A)=0$ אבל

$m(A)=m(I)$ סינגולרית $m(A^c)=0$ $\mu(A^c)=\mu(I)$

<u>דוגמאות</u>

2) מידה בדידה/נקודתית - $\mu=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\delta_{x_i}$ $\quad a_i\ge 0$

δ_{x_i} מידת דיראק -

נתמכת על קבוצה בת מניה. לכן סינגולרית

3) מידה קנטור נתמכת על קבוצת קנטור

רציפה: מידה 0 לכל נקודה. אין אטומים.

3) נניח ש μ מידה רגולרית סופית
אז ״יחידה״ רציפה בהחלט= כלומר

$$\mu = \mu_1 + \mu_2$$

כאשר μ_1 מידה אטומית טהורה ($\mu_1 \not\equiv 0$)

אז μ ~~לא~~ סינגולרית.

למה לא סינגולרית?

נניח $m(A)=0$ עבור $A \subseteq I$

$$\mu(A) = \underbrace{\mu_1(A)}_{0} + \mu_2(A) = \mu_2(A) \le \mu_2(I) < \mu(I)$$

כי $\mu_1 \not\equiv 0$

טענה אם מידה סינגולרית μ ניתנת לפירוק למידה נקודתית
ועוד מידה סינגולרית לא רציפה.

הוכחה. יהי $x \in I$ נקודה אטומית אם $0<\mu(\{x\})$.
אולם σ-סופיות בין משמע (לכל היותר בן מנייה).
נסמן את אוסף האטומים ב $A=\{x_1,x_2,\dots\}$
כאשר $0<a_i=\mu(x_i)$ נסמן:

$$\mu_1 = \sum a_i \delta_{x_i}$$

כעת נשים לב ש $\mu_2=\mu-\mu_1$ היא מידה
וכמובן סופית, וגם אין לה אטומים.

משפט תהי μ מידה סופית על I
נסמן $F(x)=\mu([0,x))$ אזי μ מידה סינגולרית
אמ״מ F רציפה, מונוטונית (במובן) $F'=0$ כמעט.

הוכחה ← (בהגדרה בקיצור) נניח ש $0<F'$ על קבוצה ממידה

תזכורת: נסמן $F_{\mu}(x) = \int_{[0,x)} \mu$

אבל F_1 לא קבועה כי $\int_I F' > 0$

ו־ $F = F_1 + F_2$ כאשר F_2 גם רציפה בהחלט

בהחלט (כי F_1 רציפה ו־ F רציפה בהחלט)

$$\mu = \mu_F = \mu_{F_1} + \mu_{F_2}$$

סינגולרית

רציפה בהחלט לכן אבסולוטית רציפה.

אז μ גם רציפה בהחלט וגם סינגולרית

נניח $F' = 0$ כ.ת. צ"ל $\alpha\beta$

מספיק להוכיח אם לכל ε קיימים קטעים זרים $I_1,\dots,I_N \subset I$

כך ש: $\sum m(I_j) \geq m(I) - \varepsilon$

$$= 1$$

וגם $\sum_{j=1}^{N} |\Delta_{I_j} f| < \varepsilon\, m(I)$

$$= 1$$

נוכיח באמצעות ויטלי - נסמן $A = \{x ; F'(x) = 0\}$ לכל $x \in A$

יש δ_x כך ש $\delta < \delta_x \Leftarrow \left|\frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta}\right| < \varepsilon$ (II) נקבל את כל הקטעים

$$\left\{ [x, x+\delta] \;;\; \begin{matrix} x \in A \\ \delta < \delta_x \end{matrix} \right\}$$

לכן כיסוי ויטלי של A לפי משפט ויטלי יש תת־משפחה

ויטלי "כמעט" את כל A. כלומר $I_1,\dots,I_N$ מכסים

משפחה כנ"ל עם ε, כך ש־ I_j הכיסוי לכל j ומקיים את (II).

נסמן ~~...~~ A_ε

$A_\varepsilon := \bigcup_{j=1}^{N} I_j$ אזי $m(A_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$

$$\mu(A_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

$$\sum \mu(I_j) = \sum \Delta_{I_j} f$$

מאחר ש־ הקטעים I_j הם קטעים סגורים זרים ומשותפים ...

נסמן/ $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_{1/2^k}$

נראה ש $m(A)=1$ אבל $\mu(A)=0$

למה $m(A)=1$ מספיק להראות ש לכל n

$m(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{1/2^k})=1$

וזה נכון כי לכל $l\ge n$

$$m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_{1/2^k}\right)\underset{\text{מונוטוניות של מידה}}{\ge} m\left(A_{1/2^l}\right)\ge 1-\frac{1}{2^l}\to 1$$

למה $\mu(A)=0$ מבורל קנטלי –

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_{1/2^k})<\infty$$

$\Downarrow$

כי $\mu(A_{1/2^k})\le\frac{1}{2^k}$

ולכן $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_{1/2^k}\right)=0$

<u>מסקנה</u>

(משפט הפירוק של לבג)

תהי μ מידת בורל סופית על I.

אזי קיים ויחיד פירוק $\mu=\mu_1+\mu_2+\mu_3$

כאשר μ_1 רציפה בהחלט, μ_2 סינגולרית ו- μ_3 סינגולרית לגמרי אטומית-

<u>הוכחה</u> כידוע לכל F פונ' עולה/ רציפה, ורציפה משמאל ניתנת

לפירוק $F=F_1+F_2$ כ

F_1: רציפה בהחלט

F_2: סינגולרית רציפה משמאל

נשתמש את המשפט הנ"ל

נגדיר $F(x)=\mu([0,x))$

$$\mu=\mu_F=\underbrace{\mu_{F_1}}_{AC\ \text{רציפה}}+\underbrace{\mu_{F_2}}_{\text{סינגולרית רציפה}}$$

שמו לב לפירוק: $\mu_{F_2} = \mu_2 + \mu_3$

μ_2: $\perp$ ~~אטומית~~ רציפה לחלוטין

μ_3: $\perp$ בכלל סינגולרית

הפירוק ל $\mu_{F_1} + \mu_{F_2}$ יחיד, כי אם

שיעור אחרון [illegible] (פרק ד')

טרנספורם Fourier

<u>הגדרה</u>

תהי $f \in L^1(\mathbb{R})$ נסמן

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iyx}\, dm(x)$$

[illegible]

מה האינטגרל של פונ' על $\mathbb{R}$ של פונ' מרוכבת $\int_{\mathbb{R}}$

$$e^{-iyx} = \cos(yx) - i\sin(yx)$$

אז

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(xy) - i\int_{\mathbb{R}} f(x)\sin(xy)$$

אם [illegible] $\lambda \in \mathbb{C}$ $\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ פונ' ($\mathrm{Re} f, \mathrm{Im} f \in L^1$)

אז $\int_{\mathbb{R}}(\lambda f) = \lambda\int_{\mathbb{R}} f$

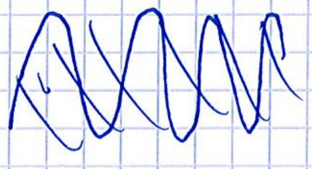
(הוכחה: $f = f_1 + i f_2$ $\quad \lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$
ולהשתמש [illegible])

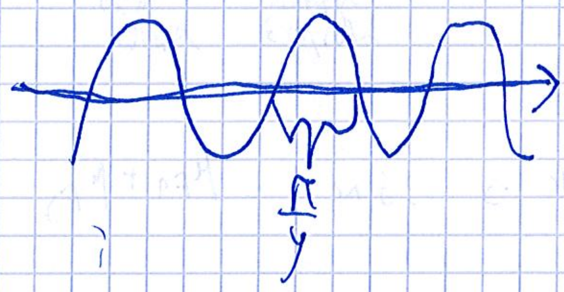
למה $f(x)e^{-iyx}$ פונ' ב x?

כי מתקיים $|f(x)e^{-iyx}| = |f(x)|$ לכל $x, y \in \mathbb{R}$

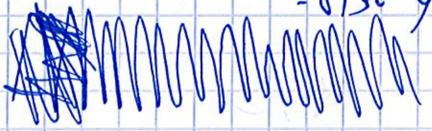
פונ'

איך נראים $\sin(xy)$, $\cos(x,y)$





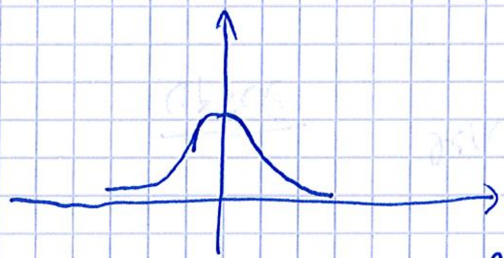
כש y גדול:



לפונק׳ ג-ת $\hat{f}(y)$ קוראים טרנספורם פוריה של f
Fourier.

דוגמאות

1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$



אז: $\hat{f}(y) = e^{-\frac{y^2}{2}}$

איך מחשבים? למשל גרסה מרוכבת אפשר לחשב.

תנ׳ ג-י מישור: $\int f = 1$

נחשב $\hat{f}$ בעזרת השלמה לריבוע:

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-ixy} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2} - ixy}$$

נרשם: $\cancel{\frac{y^2}{2}} - \frac{x^2}{2} - iyx = \frac{1}{2}(y - ix)^2$

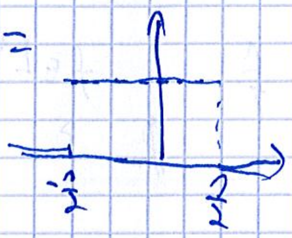
$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{y^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(y-ix)^2/2} dx = \frac{e^{y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-iy)^2} dx =$$

$$= \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = e^{-y^2/2}$$

(קטע שהמרוכבת לב.ז.ג אותו׳
מישר מסלולו סגור 3 פרש מסלולו אחר כרצוננו
משפט קושי)

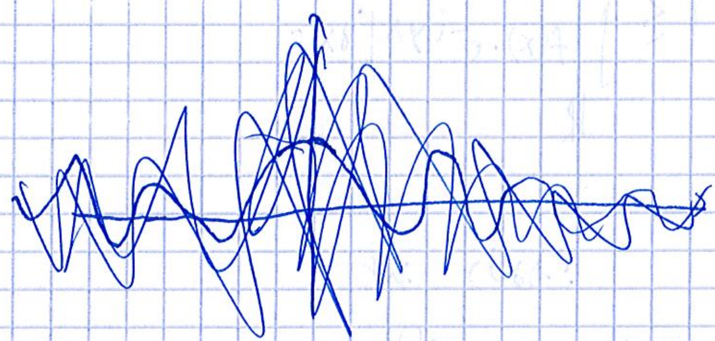
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad (2$$

$$\hat{f}(y)=e^{-\frac{y^2\sigma^2}{2}}$$

$f(x)=$  (3

$$\hat{f}(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ixy}\,dx=\int_{-1/2}^{1/2}e^{-iyx}\,dx=\frac{\sin(y/2)}{y/2}$$

$e^{-iyx}=\cos-i\sin$



$\int|\hat{f}|=+\infty$ כי $\hat{f}\notin L^1$ (כן)

(4

$g(x)=f(x)\cdot e^{-ix\cdot c}$ עבור $c\in\mathbb{R}$

$$\hat{g}(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-icx}e^{-ixy}\,dx=\hat{f}(y+c)$$

(5 טרנספורם פורייה של מידת בורל סופית μ על $\mathbb{R}$

מוגדר עבור $y\in\mathbb{R}$.

$$\hat{\mu}(y)=\int_{\mathbb{R}}e^{-iyx}\,d\mu(x)$$

שימו לב כי מחבר -

הפונק' e^{-iyx} רציפה

לכל משתנה בורל ומוגדרת. ⇐ אינטגרל קיים של μ

ניקח $\mu=\delta_0$

$$\hat{\mu}(y)=\int_{\mathbb{R}}e^{-iyx}\,d\delta_0(x)=e^{-iy0}=1$$

$\mu = \delta_1$

$$\hat{\mu}(y) = e^{-iy} = \cos(y) - i\sin(y)$$

משפט

עבור $f \in L^1$ $\hat{f}$ היא פונקציה חסומה

ורציפה במ"ש ב- $\mathbb{R}$

הוכחה

למה חסומה?

$$|\hat{f}(y)| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-iyx}dx\right| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x)\cdot e^{-iyx}|dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f(x)| = \|f\|_1 < \infty$$

למה רציפה?

ניקח $y_n \to y_0$. משה"ל. מספיק להראות ש e

$$\hat{f}(y_n) \xrightarrow{n\to\infty} \hat{f}(y)$$

צ"ל

$$\int f(x) e^{-iy_n x} dx \to \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-iy_0 x}$$

מהתכנסות נשלטת -

$$\forall x \quad f(x) e^{-iy_n x} \xrightarrow{n\to\infty} f(x) e^{-iy_0 x}$$

הכל חסום ע"י פונק' אינטג' ע"י $|f|$

פה שכחנו איך. ולכן נוכיח רציפות במ"ש של $\hat{f}$.

ב $[a,b]$ רציפות $\Leftrightarrow$ רציפות במ"ש.

ב $\mathbb{R}$ זה לא נכון, צריך להוכיח.

$$|\hat{f}(y+h) - \hat{f}(y)| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\left[e^{-ix(y+h)} - e^{-ixy}\right]dx\right| =$$

$$= \left|\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy}\left[e^{-ixh} - 1\right]dx\right| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x)e^{-ixy}|\,|e^{ihx} - 1|\,dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,|e^{ihx}-1|\,dx$$

נחסום את $|\hat f(y+h)-\hat f(y)|$ ע״י חסם ששואף לאפס

ולא תלוי ב y.

למה זה נ?

$$\omega(h) = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,|e^{ihx}-1|\,dx \xrightarrow{} 0 \text{ כ״מ}$$

+ מג׳ורנטה אינט׳ $|f|$.

לכן $|\hat f(y+h)-\hat f(y)| \le \omega(h) \xrightarrow{h\to 0} 0$

משפט

נוסחת ההיפוך של פורייה (Fourier

נניח: $f\in L^1(\mathbb{R})$ וגם כן $\hat f\in L^1(\mathbb{R})$

אזי כמעט לכל $x\in\mathbb{R}$

$$(*)\quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat f(y)\, e^{ixy}\, dy$$

[אם f רציפה + הנוסחה מתקיימת אז (*) נכון

לכל x כי אגף ימין רציף (במ״ש) ~~...~~

ומצבה הנ״ל f רציפה, ו f רציפה לכן שוויון לכל x]

מכאן נובע לכתוב שאם f רציפה אלא לא כ״ש

$\hat f$ לכן ב L^1.

למה יהיו

$f, g \in L^1(\mathbb{R})$ אזי

$$\int_{\mathbb{R}} f\hat g = \int_{\mathbb{R}} \hat f g$$

הוכחה בעזרת פוביני - נגדיר :

$$F(x,y) = f(x)\,g(y)\,e^{-ixy}$$

כדי להשתמש בפוביני צריך לוודא ש F אינטגרבילית ב $\mathbb{R}^2$

F רציפה ← מדידה.

$$|F| = |f(x)|\,|g(y)|$$

אלה רציפות ש

$$\int_{\mathbb{R}^2} |F| = \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|\,|g(y)|\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx\,dy = \|g\|_1 \cdot \|f\|_1 < \infty$$

פוביני עבור

פו' אי-שליליות שמותר להפך

תמיד אפשר

לכן F אינט' ולכן ניתן להשתמש בפוביני :

$$\int_{\mathbb{R}} f\hat{g} = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} F(x,y)\,dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} F(x,y)\,dx\right)dy = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}\cdot g$$

שיעור תרגול 14.2

עבור $f\in L^1$ נגדיר טרנספורם Fourier

$$\hat f(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ixy}\, dx$$

$\boxed{*\ \text{נניח}\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}}$

ב-$\mathbb{R}^n$ זה $x\cdot y$ מכפלה סקלרית

לפעמים e $\hat f$ ועוד ($\check{e}$) סימונים

דוגמאות: 1)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\hat f(y) = e^{-y^2/2}$$

2)

$$f(x) = e^{-\delta^2 x^2}\, e^{ixy_0}$$

$$\hat f(y) = e^{-\frac{(y-y_0)^2}{4\delta^2}}\cdot\sqrt{2\pi/\delta^2}$$

משפט

משפט ההיפוך של פורייה

~~$f\in C^1$ ... $\hat f\in L^1$ ...~~ $f,\hat f\in L^1(\mathbb{R})$

אז לכל $x\in\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int \hat f(y)\, e^{ixy}\, dy$$

הערה: $\hat f$ אם f גזירה פעמיים ברציפות ו-$f''\in L^1$ אז $\hat f\in L^1$

2) אם לא * צריך רציפות.

לגבי f רציפה (זה עזר מ-0) ...

למה 1) $\hat{f'} = -iy\hat f(y)$

$f''\in L^1 \Rightarrow$

$y^2\hat f$ חסומה $\Rightarrow |\hat f|\le \frac{M}{y^2}\in L^1$

הגדרה. משפחה של <u>יחידה מקורבת</u>

נניח $k \geq 0$ ב $\mathbb{R}$ $\int_{\mathbb{R}} k = 1$ + "תומך קומפקטי"

נגדיר $k_\delta(t) = \frac{1}{\delta} k\left(\frac{t}{\delta}\right)$

$(k_\delta)_{\delta>0}$ נקראת Approx Unity δ

עם פרמטר רציף ~~δ~~. כשהוא שואף ל 0.

משפט סטנדרטי -

אם $f \in L^1(\mathbb{R})$ ונגדיר

$$f_\delta(x) = f * k_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) k_\delta(x-y)\,dy$$

אז $\|f_\delta - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \xrightarrow{\delta \to 0^+} 0$

כלומר מתכנסת להגבלה ב L^1.

במקרה הזה הגרעין שלנו $k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ גרעין

אמנם לו אין תומך קומפקטי.

מסקנה אם $f \in L^1$, $(k_\delta)_{\delta>0}$ יחידה מקורבת

עם $k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ אז קיימת $\delta_n \to 0$ כך ש

$f_{\delta_n} \xrightarrow{n\to\infty} f$ כ"מ ב $\mathbb{R}$.

הוכחה - קטע I סגור, נובע כי $\|f_\delta - f\|_{L^1(I)} \to 0$

בפרט יש תת סדרה מתכנסת כ"מ ב I,

כלומר יש תת סדרה $\delta_n^I \to 0$ כך ש $f_{\delta_n^I} \to f$ כ"מ ב I.

~~...~~ נשתמש עבור $\delta_n^{[-1,1]}$ ~~...~~ יש לה תת סדרה $\delta_n^{[-2,2]}$

עם התכנסות כ"מ ב $[-2,2]$

~~[illegible]~~

ראינו: לכל $k\geq 0$ יש $\left(\delta_n^{[k,k]}\right)_{n=1}^{\infty}$ כך ש-
$\delta_n^{[k,k]} = \delta_n^{(k)}$

$f_{\delta_n^{(k)}} \xrightarrow[n\to\infty]{a.e.} f$ כמעט ב- $[-k,k]$

נראה שיש לכל $k\geq 0$ תת-סדרה של $\delta^{(k)}$ ב- $[-(k+1),k+1]$

תת-סדרה $\left\{\delta_n^{(k+1)}\right\}_{n=1,2,\dots}$ כך ש- $f_{\delta_n^{(k+1)}} \to f$ כמעט ב- $[-(k+1),k+1]$

לכל $k\geq 0$ האלכסון הוא
$\delta_n = \delta_n^{(n)}$

יהי $R>0$, אז $N \geq \lceil R\rceil + 80$ ו- $n \geq N$

$(\delta_n)_{n\geq N}$ היא תת-סדרה של $\delta_n^{\lceil R\rceil}$ לכן יש לנו התכנסות כמעט:

$f_{\delta_n}(x) \to f(x)$ כמעט ב- $[-R,R]$.

זה נכון לכל $R>0$ לכן ב- $[-R,R]$ לכל $R>0$, כמעט בכל מקום ב- $\mathbb{R}$.

הוכחת נוסחת ההיפוך:

הוכחה: למה: נניח $f,g \in L^1$

$$\int \hat f g = \int f \hat g$$

נניח $f\in L^1(\mathbb{R})$ ונקבע $x_0\in\mathbb{R}$

נגדיר
$$g_\delta(y) = e^{-\frac{\delta^2 y^2}{2}} e^{ix_0 y}$$

ראינו כי
$$\hat g_\delta(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{\delta^2}}\cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\delta^2}}$$

~~$k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$, $k_\delta(x) = \frac{1}{\delta}k\left(\frac{x}{\delta}\right)$, $\hat g_\delta(x) = 2\pi k_\delta(x-x_0)$~~

נגדיר $g_\delta(x) = 2\pi k_\delta(x-x_0)$ כאשר

$$k_\delta(t) = \frac{1}{\delta} k\left(\frac{t}{\delta}\right)$$

$$k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$$

לפי * נקבל לכל $\delta > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)\, g_\delta(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \hat{g}_\delta(x)\, dx$$

$$\int \hat{f}(y)\, e^{ix_0 y}\, e^{-\frac{\delta^2 y^2}{2}}\, dy = 2\pi \int_{\mathbb{R}} f(x)\, k_\delta(x-x_0)\, dx$$

ידוע כי לכל $x_0 \in \mathbb{R}$ בנקודת רציפות $\delta_h \searrow 0$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, k_{\delta_h}(x_0 - x)\, dx \longrightarrow f(x_0)$$

כלומר לכל $x_0 \in \mathbb{R}$ האגף הימני שואף ל $2\pi f(x_0)$

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)\, e^{ix_0 y}\, e^{-\frac{\delta_h^2 y^2}{2}}\, dy \xrightarrow{h\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)\, e^{ix_0 y}\, dy$$

(לכל $x_0 \in \mathbb{R}$)

$\hat{f}(y)\, e^{ix_0 y} \cdot e^{-\frac{\delta^2 y^2}{2}} \xrightarrow{h\to\infty} \hat{f}(y)\, e^{ix_0 y}$ לכל $y \in \mathbb{R}$ נקודתית

וגם יש מג'ורנטה אינטגרבילית:

$$\left|\hat{f}(y) \cdot e^{ixy}\, e^{-\frac{\delta_h^2 y^2}{2}}\right| \le |\hat{f}(y)| \in L^1$$

ערך מוחלט 1 ; ערך מוחלט ≤ 1.

סוף כש $n \to \infty$ מקבלים:

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)\, e^{ix_0 y}\, dy = 2\pi f(x_0)$$

משפט Plancherel

אם $f, \hat{f} \in L^1$.

אזי $|f|^2$ וגם $|\hat{f}|^2$ אינטגרביליות ו-

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2$$

הוכחה - כמו שראינו לכל $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)\, e^{ixy}\, dy$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \bar{f}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \overline{\frac{1}{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)\, e^{ixy}\, dy \right)}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(y)}\, \underset{e^{-ixy}}{\underset{\parallel}{\overline{e^{ixy}}}}\, dy \right) dx$$

נשתמש בפוביני (הפונקציה $\left[(x,y) \to f(x)\, \overline{\hat{f}(y)}\, e^{-ixy}\right]$ היא ב-$L^1(\mathbb{R}^2)$ כי $f, \hat{f} \in L^1$)

נקבל

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(y)} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy}\, dx \right) dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(y)}\, \hat{f}(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(y)|^2\, dy$$

בסוף ~~הס~~ הסמסטר: טרנספורם פורייה שומר על נורמת L^1 (עד כדי 2π),

ניתן להשתמש ב-Plancherel כדי להרחיב את הגדרת טרנספורם פורייה לכל $L^2(\mathbb{R})$