

12.1 גודל וריאטור

הנחה

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Var}_{[a,b]}(f) = \sup \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

$$\Pi = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

$$\text{Var}_{[a,b]}(f) = |f(b) - f(a)|$$

מכונה f וריאטור

$$\text{Var}_{[a,b]}(f) = \int_{[a,b]} |f'|$$

מכונה f וריאטור

$$f \in BV \iff \text{Var}_{[a,b]}(f) < \infty$$

הכלל BV הוא גודל וריאטור של פונקציה

BV - המרחב הווריאטורי הקטן ביותר של פונקציות וריאטוריות.

משפט כל פונקציה BV היא פונקציה של סדר ראשון.

$$f = g - h$$

הוכחה

יש g ו- h פונקציות וריאטוריות (כל פונקציה וריאטורית היא פונקציה של סדר ראשון).

כל פונקציה וריאטורית היא פונקציה של סדר ראשון.

כל פונקציה וריאטורית היא פונקציה של סדר ראשון.

משפט

כל פונקציה BV היא פונקציה של סדר ראשון.

הוכחה - נניח $f \in BV$ ונראה כי f היא פונקציה של סדר ראשון.

הוכחה - נניח $f \in BV$ ונראה כי f היא פונקציה של סדר ראשון.

הוכחה - נניח $f \in BV$ ונראה כי f היא פונקציה של סדר ראשון.

משפט $m(B) < \infty$ אם ורק אם $B \in \mathcal{B}$ ו- $A \in \mathcal{A}$ ו- $x \in A$ ו- $x \in B$.

הוכחה - נניח $m(B) < \infty$ ונראה כי $B \in \mathcal{B}$.

הוכחה - נניח $m(B) < \infty$ ונראה כי $B \in \mathcal{B}$.

נניח

$$B_1, \dots, B_N \in \mathcal{B}$$

אם

הם אינם משתפיים

אם

$$B_1, \dots, B_m$$

ע"כ

$$i_1, \dots, i_m$$

אם

אם

$$m\left(\bigcup_{j=1}^m B_{i_j}\right) \geq c_j \cdot m\left(\bigcup_{i=1}^N B_i\right)$$

$$c_j = 3^{-j}$$

אם

Vitali de מוסר גרסא

נניח

$$D_1, \dots, D_L \in \mathcal{B}$$

אם

$$c_j = \frac{1}{2 \cdot 3^j}$$

אם

$$m\left(\bigcup_{i=1}^L D_i\right) \geq c_j \cdot m(A)$$

אם

$$m(A) = \sup\{m(K) \mid K \subseteq A\}$$

אם

$$m(K) \geq \frac{m(A)}{2} \text{ or } m(K) < \frac{m(A)}{2}$$

אם

$$B$$

אם

$$\tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_L \in \mathcal{B}$$

אם

אם

אם

אם

$$\{\tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_L\}$$

אם

$$D_1, \dots, D_L \in \mathcal{B}$$

אם

$$m\left(\bigcup_{i=1}^L D_i\right) \geq \frac{1}{3^j} m\left(\bigcup_{i=1}^L \tilde{D}_i\right) \geq \frac{1}{3^j} m(K) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^j} m(A)$$

$$B_0 = \mathcal{B}$$

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

$$A_n = A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n D_i\right)$$

אם

אם

אם

אם

אם

אם

$$m(A_n) = (1 - c_j) m(A)$$

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

$$D_1, \dots, D_L$$

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

אם

for $n \geq 1$ $A_n \subseteq B_n$ $\mu(B_n) < \infty$

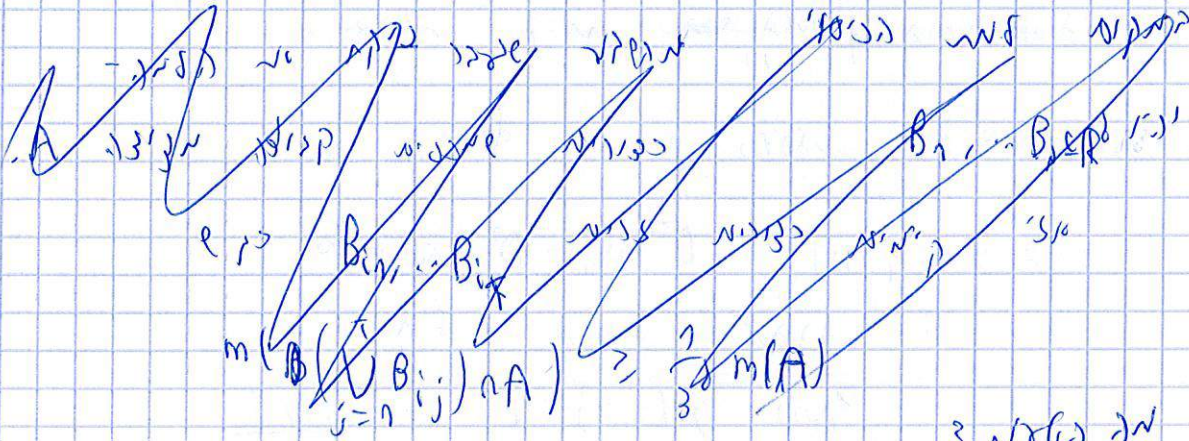
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \geq c \mu(A)$$

$\Rightarrow$

$$\mu(A_n) \leq (1-c)\mu(A)$$

n/26

for the series $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) < \infty$ $A_i \subseteq A$



lemma

for $\mu(A) < \infty$ $\mu(A_i) < \infty$ $\mu(A_i) < \infty$

lemma
for $\mu(A) < \infty$ $\mu(A_i) < \infty$ $\mu(A_i) < \infty$

for $\mu(A) < \infty$ $\mu(A_i) < \infty$ $\mu(A_i) < \infty$

for $\mu(A) < \infty$ $\mu(A_i) < \infty$ $\mu(A_i) < \infty$

$$K_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^d; |f(x, k)| < \epsilon\}$$

for $\mu(A) < \infty$ $\mu(A_i) < \infty$ $\mu(A_i) < \infty$

$$\mu(K_\epsilon) \leq 2\mu(K)$$

for $\mu(A) < \infty$ $\mu(A_i) < \infty$ $\mu(A_i) < \infty$

for $\mu(A) < \infty$ $\mu(A_i) < \infty$ $\mu(A_i) < \infty$

for $\mu(A) < \infty$ $\mu(A_i) < \infty$ $\mu(A_i) < \infty$

for $\mu(A) < \infty$ $\mu(A_i) < \infty$ $\mu(A_i) < \infty$

for $\mu(A) < \infty$ $\mu(A_i) < \infty$ $\mu(A_i) < \infty$

for $\mu(A) < \infty$ $\mu(A_i) < \infty$ $\mu(A_i) < \infty$

for $\mu(A) < \infty$ $\mu(A_i) < \infty$ $\mu(A_i) < \infty$

$$D^+ f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

מקרה 2 - (וקד 8.5.1)

האם f גלילית? ק"מ וסגור? f גלילית? f גלילית?

מקרה 3 - f גלילית? f גלילית? f גלילית?

מקרה 4 - f גלילית? f גלילית? f גלילית?

מקרה 5 - f גלילית? f גלילית? f גלילית?

מקרה 6 - f גלילית? f גלילית? f גלילית?

מקרה 7 - f גלילית? f גלילית? f גלילית?

$$D^-f(x_0) = D^+f(x_0) < \infty$$

מקרה 8 - f גלילית? f גלילית? f גלילית?

מקרה 9 - f גלילית? f גלילית? f גלילית?

מקרה 10 - f גלילית? f גלילית? f גלילית?

מקרה 11 - f גלילית? f גלילית? f גלילית?

$$\left[\begin{array}{l} \text{מקרה 12} \\ \text{מקרה 13} \\ \text{מקרה 14} \end{array} \right]$$

מקרה 15

מקרה 16 - f גלילית? f גלילית? f גלילית?

$$\forall x \in (a, x_0) \quad f(x) > f(x_0)$$

מקרה 17 - f גלילית? f גלילית? f גלילית?

מקרה 18

מקרה 19 - f גלילית? f גלילית? f גלילית?

$$x_0 \rightarrow (q_{x_0}, r_{x_0}) \in \mathbb{Q}^2$$

$$(x_0, (q_{x_0}, r_{x_0})) \sim (y_0, (q_{y_0}, r_{y_0}))$$

$$D^-f(x_0), D^+f(x_0) \text{ גלילית? } f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

מקרה 20 - f גלילית? f גלילית? f גלילית?

מקרה 21 - f גלילית? f גלילית? f גלילית?

הנחיה

$$\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \wedge \neg B \quad \text{De Morgan's Law}$$

$\therefore \text{ } \checkmark \checkmark \checkmark$

'5k

$$r \in \mathbb{Q} \quad r \geq p$$

15, 16

808 108

$\rho > 0$ $\rho < 0$ $\rho = 0$ $\rho < 0$

$$p(x) > p(x_0)$$

$$x_j \in A_r \quad j \in J$$

2 11 12 13

דפדפון מילר

2 1586

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad | 1/20$$

$x \in [a, b]$

۱۳۹۵

$$A_\infty = \{ x \in [a, b] ; D^+ f(x) = +\infty \}$$

$$m(A_\infty) > 0$$

$$M > \frac{f(b) - f(a)}{m(A_\infty)}$$

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta_{x_0}] \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq M$$

$$B = \{ [x_0, x_0 + h] ; x_0 \in A_\infty, h < \delta_{x_0} \}$$

$$A_\infty \cap B \neq \emptyset$$

$$\varepsilon = \frac{m(A_\infty)}{2}$$

$$m\left(\bigcup_{i=1}^N I_i\right) \geq \frac{1}{2} m(A_\infty)$$

$$[x, y] = I \in B$$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq M$$

$$I_i = [a_i, b_i]$$

$$\frac{f(b_i) - f(a_i)}{b_i - a_i} \geq M$$

$$f(b) - f(a) = (f(a_1) - f(a)) + \sum_{i=1}^n (f(b_i) - f(a_i)) + \sum_{i=1}^{n-1} (f(a_{i+1}) - f(b_i)) + (f(b) - f(b_n))$$

new $\frac{0}{1}$

f מונוטונית $0 \leq \Delta \leq$

$$f(b) - f(a) \geq \sum_{i=1}^n (f(b_i) - f(a_i)) \geq \sum_{i=1}^n M \cdot (b_i - a_i) =$$

$$\geq M \cdot m \left(\bigcup_{i=1}^n I_i \right) \geq$$

$$\geq m \frac{1}{2} m(A_\infty) > \frac{1}{2} \frac{f(b) - f(a)}{m(A_\infty)} \cdot \frac{m(A_\infty)}{2} = \frac{f(b) - f(a)}{2}$$

הכלל

0. הוכחה כי $f'(x) = +\infty$ היא מונטונית
 וק"מ גורמת להוכחה
 הפונקציה f היא קבוצה, f היא קבוצה

הוכחה כי קבוצה היא קבוצה

הוכחה כי קבוצה היא קבוצה

הוכחה כי קבוצה היא קבוצה

הוכחה כי קבוצה היא קבוצה

הוכחה כי קבוצה היא קבוצה

הוכחה כי קבוצה היא קבוצה

הוכחה כי קבוצה היא קבוצה

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \neq \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$A_{r,s} = \{ x \in [a,b] : \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > s > r > \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \}$$

$$A = \{x \in [a, b]; D^+ f(x) \leq r\}$$

$$A = \bigcup_{r,s \in \mathbb{Q}} A_{r,s}$$

$$m(A_{r,s}) = 0$$

$$m(A_{r,s}) > 0$$

$$x \in A_{r,s}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{m(A_{r,s} \cap [x_0, x_0+h])}{m([x_0, x_0+h])} = 1$$

$$\forall 0 < h < h_0 \quad m(A_{r,s} \cap [x_0, x_0+h]) \geq h \cdot (1 - \varepsilon)$$

$$\liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} < r$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} < r \cdot h$$

$$I = [x_0, x_0+h] \subset [\alpha, \beta]$$

$$\frac{m(A_{r,s} \cap [\alpha, \beta])}{\beta - \alpha} \geq 1 - \varepsilon$$

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < r$$

$$A_{r,s} \text{ is a subset of } \limsup s$$

$$\frac{f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)}{\frac{1}{n}} > s$$

$$B = \left\{ [x, x + h_n^{(x)}] ; x \in A_{r,s} \cap [\alpha, \beta] \right\}$$

$$A_{r,s} \cap [\alpha, \beta]$$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} > s \quad B \ni I = [x, y]$$

$$[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$$

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \geq (1 - \epsilon) m(A_{r,s} \cap [\alpha, \beta])$$

$$m(A_{r,s} \cap [\alpha, \beta]) \geq (1 - \epsilon) (\beta - \alpha)$$

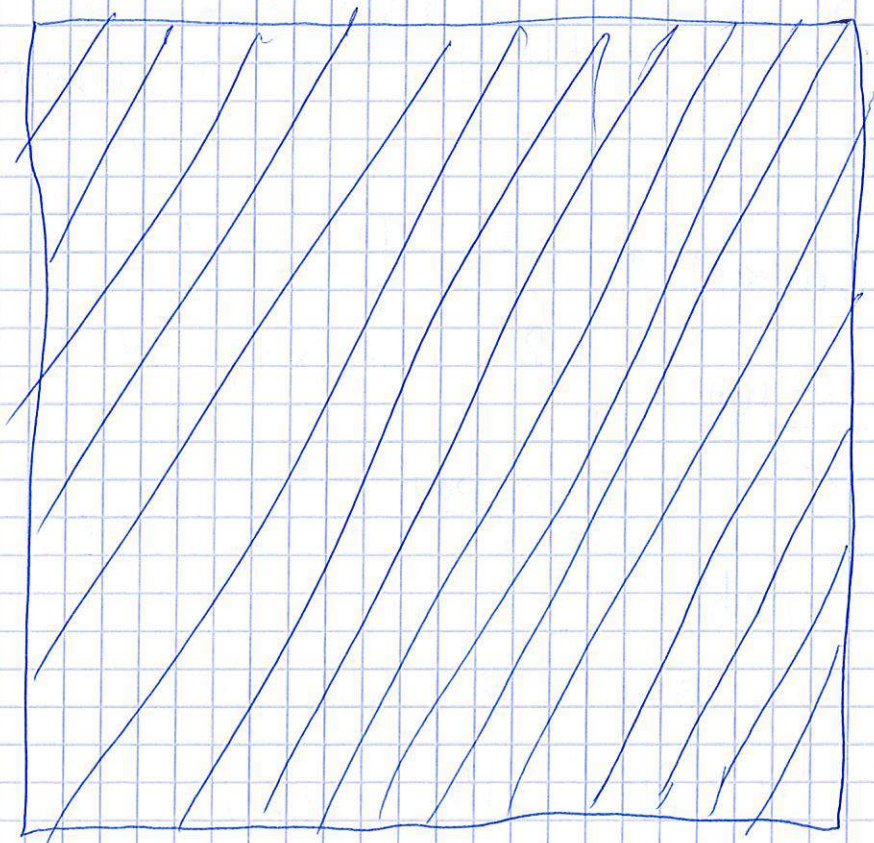
$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \geq (1 - \epsilon)^2 (\beta - \alpha)$$

$$f(\beta) - f(\alpha) \geq \sum f(b_i) - f(a_i) \geq s \sum (b_i - a_i) \geq s(1 - \epsilon)^2 (\beta - \alpha)$$

$$f(\beta) - f(\alpha) < \epsilon (\beta - \alpha)$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{such that} \quad \forall x \in A_{r,s} \cap [\alpha, \beta] \quad |f(x) - f(\alpha)| < \delta$$

$$\epsilon > 0 \quad \delta > 0 \quad \text{such that} \quad \forall x \in A_{r,s} \cap [\alpha, \beta] \quad |f(x) - f(\alpha)| < \delta$$



1861

$$\text{Def } N^p \quad \varepsilon > 0 \quad \neg \quad X \in A \quad \text{so} \quad N^k$$

2) $m(\beta) < \varepsilon$ 1) $x \in \beta$ $\varepsilon / 2$

→ 861 se 1051 609N

1050 F. ~ 510 ~ 510 ~ 510 $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ~ 510
s/o $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ A $\in \mathcal{S}(G)$

משפט 1.1.1. $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{F}$ נ"ל $\mathcal{F}$ מ"ל $\mathcal{F}$ מ"ל $\mathcal{F}$

$$m(A \setminus \bigcup_{i=1}^N B_i) < \epsilon \cdot m(A)$$

$$m(\bigcup_{i=1}^N B_i) \leq (1-\beta) m(A) + \beta$$

~~→~~ → μ_{rel} $\rightarrow$ μ_{rel}

W2) $B_1, \dots, B_n \in F$ w.w., GSPN von $\mathcal{M}$

$$m(A - \bigcup_{i=1}^N B_i) \leq (1 - \epsilon) m(A) \quad \square$$

$$m\left(\bigcup_{i=1}^n B_i \cap A\right) > c_d \cdot m(A)$$

~~3/11/21~~ 3/11/21 18:00 22/2

המשפט הראשון

$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i$

$$F_0 = f \quad A_0 = A \quad / \text{no}$$

$$B_1^{(0)}, \dots, B_{N_0}^{(0)} \in F_0 \quad \text{w.r.t.}$$

$$A_1 = A_0 - \bigcup_{i=1}^N \overline{B_i^{(0)}}$$

$$m(A_1) < (1 - \epsilon_j) m(A_2) \quad \text{w'' w''} \quad \text{Q}$$

And also $F_0 \cap \mathcal{M}_0 \neq \emptyset$ and $F_0 \subset F_1$ and

$$\overline{D_{n_1}^{(0)}} \dots \overline{D_{n_n}^{(0)}} \text{ of } \mathcal{M}^2, \text{ UNP, } \mathcal{M}^2 \text{ } \mathcal{M}^2$$

A_2 से '81064' को F_2 से '510' ~~में~~

15) $\delta_{\text{diam}} \leq \epsilon$ or $\int_0^\delta \beta \, ds \geq \epsilon$ $0 < \epsilon < \delta(x, \bigcup_{i=1}^n B_i^w)$ e $x \in A_1$ $\delta \geq \delta$

$$F_1 \supset B_{n_1}^{(1)}, \dots, B_{n_1}^{(1)} \quad \text{אם } n_1 \text{ זעיר ו-} B_{n_1}^{(1)} \text{ זעיר}$$

$$m(A_2) \leq (1-c_\delta)m(A_1) \quad \text{אם } n_1 \text{ זעיר} \quad A_2 = A_1 - \bigcup_{i=1}^{n_1} B_i^{(1)} \quad \text{ע"כ}$$

$$\leq (1-c_\delta)^2 m(A)$$

אם n_1 זעיר ו- $B_{n_1}^{(1)}$ זעיר, אז A_2 זעיר ו- $B_{n_2}^{(2)}$ זעיר.

אם n_1 זעיר ו- $B_{n_1}^{(1)}$ זעיר, אז A_2 זעיר ו- $B_{n_2}^{(2)}$ זעיר.

$$B_{n_1}^{(1)}, \dots, B_{n_1}^{(1)}, B_{n_2}^{(2)}, \dots, B_{n_2}^{(2)}, \dots, B_{n_k}^{(k)}, \dots, B_{n_k}^{(k)}$$

$$\bigcup_{i=1}^k B_{n_i}^{(i)} \quad \text{אם } n_i \text{ זעיר ו-} B_{n_i}^{(i)} \text{ זעיר}$$

$$A \supset \bigcup_{i=1}^k B_{n_i}^{(i)} \quad \text{אם } n_i \text{ זעיר ו-} B_{n_i}^{(i)} \text{ זעיר}$$

$$m(A - \bigcup_{i=1}^k B_{n_i}^{(i)}) \leq (1-c_\delta)^k m(A)$$

$$\leq (1-c_\delta)^k \quad \text{אם } n_i \text{ זעיר ו-} B_{n_i}^{(i)} \text{ זעיר}$$

אם n_i זעיר ו- $B_{n_i}^{(i)}$ זעיר, אז A זעיר ו- $B_{n_i}^{(i)}$ זעיר.

$$\text{אם } n_i \text{ זעיר ו-} B_{n_i}^{(i)} \text{ זעיר, אז } A \text{ זעיר ו-} B_{n_i}^{(i)} \text{ זעיר}$$

$$A \supset \bigcup_{i=1}^k B_{n_i}^{(i)} \quad \text{אם } n_i \text{ זעיר ו-} B_{n_i}^{(i)} \text{ זעיר}$$

$$B_1, \dots, B_n \in F \quad \text{אם } n \text{ זעיר ו-} B_n \text{ זעיר}$$

$$m\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) \geq c_\delta m\left(\bigcup_{B \in F} B\right) \quad \text{אם } n \text{ זעיר ו-} B_n \text{ זעיר}$$

$$0 < c_\delta < 1$$

$$\text{אם } n \text{ זעיר ו-} B_n \text{ זעיר, אז } A \text{ זעיר ו-} B_n \text{ זעיר}$$

$$A \supset \bigcup_{i=1}^k B_{n_i}^{(i)} \quad \text{אם } n_i \text{ זעיר ו-} B_{n_i}^{(i)} \text{ זעיר}$$

$$A \supset \bigcup_{i=1}^k B_{n_i}^{(i)} \quad \text{אם } n_i \text{ זעיר ו-} B_{n_i}^{(i)} \text{ זעיר}$$

$$A \supset \bigcup_{i=1}^k B_{n_i}^{(i)} \quad \text{אם } n_i \text{ זעיר ו-} B_{n_i}^{(i)} \text{ זעיר}$$

$$m(A) = \sup \left\{ m\left(\bigcup_{B \in F} B\right) \mid B \in F \right\}$$

$$m(A) = \sup \left\{ m\left(\bigcup_{B \in F} B\right) \mid B \in F \right\} \quad \text{אם } n \text{ זעיר ו-} B_n \text{ זעיר}$$

$$m(A) = \sup \left\{ m\left(\bigcup_{B \in F} B\right) \mid B \in F \right\} \quad \text{אם } n \text{ זעיר ו-} B_n \text{ זעיר}$$

$\varepsilon > 0$ $\forall \delta > 0$ $\exists \eta > 0$ $\forall A \in \mathcal{F}$ $m(A) < \delta \Rightarrow m(A_\eta) < \varepsilon$

$$A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d, d(x, A) \leq \varepsilon\}$$

$$A_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} A$$

A_ε $\supset A$ $\forall \varepsilon > 0$

$$m(A_\varepsilon) \geq m(A)$$

$$m(A_\varepsilon) \leq \frac{1}{1 - \frac{c_0}{2}} m(A)$$

$$0 < c_0 < 1$$

$$\varepsilon_0 < \delta$$

$A \in \mathcal{F}$ $m(A) < \delta$

$A \in \mathcal{F}$ $m(A) < \delta$

$$F_0 \supset \mathcal{F}$$

$$A \subseteq \bigcup_{B \in F_0} B \subseteq A_{\varepsilon_0}$$

$B \in F_0$ $\Rightarrow m(B) < \delta$ $\Rightarrow m(B_{\varepsilon_0}) < \varepsilon$

$$m\left(\bigcup_{B \in F_0} B\right) \leq m(A_{\varepsilon_0}) \leq \frac{1}{1 - \frac{c_0}{2}} m(A)$$

$$(*) \quad \left(1 - \frac{c_0}{2}\right) m\left(\bigcup_{B \in F_0} B\right) < m(A)$$

$$B_1, \dots, B_n \in F_0$$

$$(**) \quad m\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) \geq c_0 m\left(\bigcup_{B \in F_0} B\right)$$

$$m\left(\bigcup_{i=1}^N B_i \cap A\right) \geq \frac{c_0}{2} m(A)$$

(*) → (k)

$$Y = \bigcup_{i=1}^N B_i$$

$$X = \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B$$

$$m(X \setminus A) < \frac{c_0}{2} m(X) \quad \leftarrow (*)$$

$$m(Y) \geq c_0 m(X) \quad \leftarrow (**)$$

$$\cancel{m(A \cap Y)} + \cancel{m(X \setminus A \cap Y)} =$$

$$\cancel{m(Y \cap A)} + \cancel{m(X \setminus A \cap Y)}$$

$$m(A \cap Y) = m(A) + m(Y) - m(A \cup Y) \geq$$

$$\geq m(X) \left[\left(1 - \frac{c_0}{2}\right) + c_0 - 1 \right] = \frac{c_0}{2} m(X)$$

$$m\left(\bigcup_{i=1}^N B_i \cap A\right) \geq \frac{c_0}{2} m(A)$$

2nd

$A \subseteq \mathbb{R}^d$

$B_1, \dots, B_N \in \mathcal{F}$

$$m\left(\bigcup_{i=1}^N B_i\right) \geq c_0 m\left(\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B\right)$$

$0 < c_0 < 1$

$$R_0 = \sup \{ \text{diam}(B) \mid B \in \mathcal{F} \} < \infty$$

$$\text{diam}(B_0) \geq \frac{1}{2} R$$

$$B_0 \in \mathcal{F}$$

$$\overline{B_0}$$

$$F_1$$

$$F_1$$

$$R_n = \sup \{ \text{diam}(B) \mid B \in \mathcal{F}_n \}$$

$$\text{diam}(B_n) > \frac{1}{2} R_n$$

$$B_0, B_1, \dots$$

$$i > j \Rightarrow \text{diam}(B_i) \leq 2 \text{diam}(B_j)$$

$$\text{diam}(B_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \supseteq B$$

$$B = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$$

$$\text{diam}(B_i) < \frac{1}{2} \text{diam}(B)$$

$$B_1, \dots, B_{n-1}$$

$$B_n$$

$$i \leq n-1$$

$$\text{diam}(B_i) \geq \frac{1}{2} \text{diam}(B)$$

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \geq \frac{1}{5} m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$$

$$\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$$

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \geq \frac{1}{5} m\left(\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B\right)$$

$$m\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) \rightarrow m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$$

72 Lebesgue Measure

Let f be a measurable function

Let $x_0 \in \mathbb{R}^d$ and $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$$\frac{1}{m(B(x_0, \epsilon))} \int_{B(x_0, \epsilon)} f(x) dm(x) \rightarrow f(x_0) \text{ as } \epsilon \rightarrow 0$$

Lebesgue

theorem

$$L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$$

locally integrable

$$f = \mathbb{1}_A$$

characteristic function of A

Let A be a measurable set

$$1 \leftarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{m(B(x_0, \epsilon) \cap A)}{m(B(x_0, \epsilon))} \text{ for } x_0 \in A$$

(Lebesgue's theorem) $m(A) > 0$ for A measurable

Let $I \subseteq [0, 1]$ be an interval and $A \subseteq [0, 1]$ measurable

$$m(A) = 1$$

$$\frac{m(I \cap A)}{m(I)} > \alpha$$

for some α

Lebesgue

$$1 = \frac{m(I)}{m(I)} = \frac{m(I \cap A) + m(I \cap A^c)}{m(I)}$$

$$I \subseteq [0, 1] \text{ for } \frac{m(I \cap A^c)}{m(I)} \leq 1 - \alpha$$

Let $I \subseteq [0, 1]$ be an interval and A^c measurable

Let $x_0 \in A^c$ and $\epsilon > 0$ be such that

$$\frac{m(A^c \cap (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon))}{m((x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon))} > 1 - \frac{\alpha}{2}$$

11

2-α

Let A be measurable

Let $f \in L^1(\mathbb{R})$ and $\delta > 0$

$f_n \xrightarrow{a.e.} f$ we wish to show $\{f_n\}$

$$\int_{x_0 - \frac{1}{2n}}^{x_0 + \frac{1}{2n}} f \, d\lambda = f_n(x_0)$$

$f_n \xrightarrow{a.e.} f$ and we wish to show f_n is measurable

$$\begin{aligned} f_n(x) - f_n(x_0) &= n \cdot \left[\int_{x - \frac{1}{2n}}^{x + \frac{1}{2n}} f(t) \, dt - \int_{x_0 - \frac{1}{2n}}^{x_0 + \frac{1}{2n}} f(t) \, dt \right] \\ &= n \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) \mathbb{1}_{[x - \frac{1}{2n}, x + \frac{1}{2n}]}(t) \, dt - \int_{\mathbb{R}} f(t) \mathbb{1}_{[x_0 - \frac{1}{2n}, x_0 + \frac{1}{2n}]}(t) \, dt \right) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \end{aligned}$$

|f| is measurable or

Let $x \in \mathbb{R}$ and $A \subseteq \mathbb{R}$ and $\delta(x, A)$

$$\delta(x, A) = \inf \{ |x - y| : y \in A \}$$

$x \in A$ for some $y \in A$

$$\delta(x + y, A) = o(|y|)$$

$|y| \rightarrow 0$ then

Let $\delta > 0$ and $\epsilon > 0$ we wish to show $\delta(x + y, A) < \epsilon$

$$\frac{\delta(x + y, A)}{|y|} < \epsilon$$

Let $x \in A$ and $y \in \mathbb{R}$

$$\frac{m(A \cap [x - \epsilon, x + \epsilon])}{2\epsilon} \rightarrow 1$$

$|y| < \delta$ and $\delta > 0$ we wish to show $\delta(x + y, A) < \epsilon$

$$\frac{m(A \cap [x - \epsilon, x + \epsilon])}{2\epsilon} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{\delta(x+y, A)}{|y|} > \varepsilon$$

$$0 < y$$

$$A \cap [x+y-\varepsilon y, x+y] = \emptyset$$

$$q > \text{...} A \cap [x+y-\varepsilon y, x+y] = \emptyset$$

$$1 - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{m(A \cap [x-y, x+y])}{2y}$$

$$\leq \frac{m([x-y, x+y-\varepsilon y])}{2y} = \frac{2y - \varepsilon y}{2y} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$A \cap [x+y-\varepsilon y, x+y] = \emptyset$$

$$[x-y, x+y] \subset A$$

$$[x-y, x+y-\varepsilon y]$$

$$[0, 1] \supset A$$

$$\frac{m(A \cap [0, 2^{-n}])}{2^{-n}} = \frac{1}{2}$$

$$m(A) = \frac{1}{2}$$

$$A \cap [0, \frac{1}{2}] = \frac{1}{2} A$$

$$2^{-n} A = A \cap [0, 2^{-n}]$$

$$m(A) = \frac{1}{2}$$

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} [3 \cdot 2^{-n-2}, 2^{-n}]$$

$$2^{-n} A = A \cap [0, 2^{-n}]$$

$$m(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$$

15360

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$



۱۳۳۷

$$V_{\text{or}} f$$

$$a = x_0 < x_1 <$$

$$\text{Var} f \leq \infty$$

$$\sim N''_{\mu\nu\rho}$$

$$\text{Var}_{[a,b]} f = |f(b) - f(a)|^{2/\alpha}$$

Lesson

15 NIC

0 13'NN

$$A \subseteq \mathbb{R}$$

side

1/10/20

فصل ۱۸

اندر

~ ~ ~ ~ ~

$\sim 87\%$

NSW

פונקציה

د'ل'ل'

$$x \in A$$

۵۵۵

$$f(x) = +\infty$$

18

Hand