

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Let $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ be a function. Then f is differentiable at x_0 if and only if the limit exists.

Let $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ be a function. Then f is differentiable at x_0 if and only if the limit exists.

$$\lim_{m(I) \rightarrow 0} \frac{1}{m(I)} \int_I f(y) dy = f(x_0)$$

Let $x_0 \in I$ and I be an interval. Then the limit exists if and only if f is continuous at x_0 .

$$x_0 \in I \subset [a, b]$$

Let $\epsilon > 0$. Then there exists $\delta > 0$ such that if $m(I) < \delta$ and $x_0 \in I$, then $|\frac{1}{m(I)} \int_I f - f(x_0)| < \epsilon$.

$$m(I) < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{m(I)} \int_I f - f(x_0) \right| < \epsilon$$

$$\int_I f$$

Let $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ be a function. Then f is differentiable at x_0 if and only if the limit exists.

Let $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ be a function. Then f is differentiable at x_0 if and only if the limit exists.

Let $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ be a function. Then f is differentiable at x_0 if and only if the limit exists.

Let $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ be a function. Then f is differentiable at x_0 if and only if the limit exists.

Let $x \in \mathbb{R}^d$ and $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ be a function. Then f is differentiable at x if and only if the limit exists.

$$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$$

Let $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ be a function. Then f is differentiable at x if and only if the limit exists.

$$\lim_{m(B) \rightarrow 0} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y) dy = f(x)$$

Let $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ be a function. Then f is differentiable at x if and only if the limit exists.

Let $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ be a function. Then f is differentiable at x if and only if the limit exists.

Let $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ be a function. Then f is differentiable at x if and only if the limit exists.

$$\lim_{m(B) \rightarrow 0} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)| dy = 0$$



e

75 100

$$\left| \int_B f(y) dy - f(x) \right| = \left| \int_B [f(y) - f(x)] dy \right| \leq \int_B |f(y) - f(x)|$$

$$\int_A c = c$$

(מסלול מוגדר)

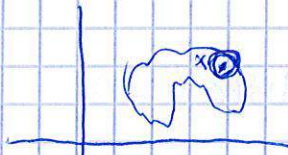
אזור A

1/20

$$f = \mathbb{1}_A$$

~~מסלול מוגדר~~

d=2



מסלול מוגדר x ∈ A

$$\int_B f = \frac{m(B \cap A)}{m(B)}$$

מסלול

1/20

x ∈ B

מסלול

אזור A ו-B

A > 1/20

$$\lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{m(B \cap A)}{m(B)} = 1$$

מסלול מוגדר

מסלול מוגדר מוגדר מוגדר מוגדר מוגדר

מסלול מוגדר מוגדר מוגדר מוגדר מוגדר

מסלול מוגדר מוגדר מוגדר מוגדר מוגדר

מסלול מוגדר מוגדר מוגדר מוגדר מוגדר

A ⊆ ℝ^d

$$\lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{m(B \cap A)}{m(B)} = 1$$

x ∈ B

מסלול מוגדר מוגדר מוגדר מוגדר מוגדר

מסלול מוגדר מוגדר מוגדר מוגדר מוגדר

מסלול מוגדר מוגדר מוגדר מוגדר מוגדר

$x \in A^c$ $\lim_{m(B) \rightarrow 0} \frac{m(B \cap A)}{m(B)} = \mathbb{1}_A(x) = 0$

$$\lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{m(B \cap A)}{m(B)} = \mathbb{1}_A(x) = 0$$

אם $x \in A^c$ אז $\lim_{m(B) \rightarrow 0} \frac{m(B \cap A)}{m(B)} = 0$ כי $x \notin A$ ולכן $m(B \cap A) = 0$ לכל B שמכיל את x .

למשל: $x \in \mathbb{R}^d$ ו- $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ אז

$x \in \mathbb{R}^d$ ו- $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ אז

$$\lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \int_B f(y) dy - f(x) m(B) = 0$$

כלומר $\lim_{m(B) \rightarrow 0} \frac{\int_B f(y) dy}{m(B)} = f(x)$ כאשר $x \in B$.

דוגמה:

נניח $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ו- $x \in \mathbb{R}^d$.

נבחר $B_1, \dots, B_N \subset \mathbb{R}^d$ כדלהלן.

אז $\lim_{m(B) \rightarrow 0} \frac{\int_B f(y) dy}{m(B)} = f(x)$

$B_1, \dots, B_N$

$$m\left(\bigcup_{j=1}^N B_{i,j}\right) \geq c(d) \cdot m\left(\bigcup_{j=1}^N B_{i,j}\right)^{\frac{1}{d}}$$

$c(d) = \frac{1}{3^d}$

הוכחה:

נניח $B_1, \dots, B_N$ הם כדורים שמכילים את x ו- F_0 הוא כדור שמכיל את כל B_i .

אז $m(F_0) \geq \sum_{i=1}^N m(B_i)$ ולכן $m(F_0) \geq N \cdot m(B_1)$.

B_{i_n} $\subseteq F_n$ $\subseteq F_0$ $\subseteq F_0$ $\subseteq F_0$ $\subseteq F_0$

$\exists B_{i_n} \subseteq F_n \subseteq F_0$ $\subseteq F_0$ $\subseteq F_0$ $\subseteq F_0$ $\subseteq F_0$ $\subseteq F_0$

$F_0 \setminus F_n$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$

$B = B(x, r)$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$

$\bigcup_{B \in F_0 \setminus F_n} B$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$

$B \cap B_{i_n} \neq \emptyset$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$

$\text{radius}(B_{i_n}) \geq \text{radius}(B)$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$

$d(x, \text{center}(B_{i_n})) \leq \text{radius}(B_{i_n}) + \text{diam}(B) \leq 3 \text{radius}(B_{i_n})$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$ $\subseteq F_0 \setminus F_n$

$B_{i_n} \subseteq F_n \subseteq F_0$ $\subseteq F_0$ $\subseteq F_0$ $\subseteq F_0$ $\subseteq F_0$ $\subseteq F_0$

$F_n \subseteq F_{n-1}$ $\subseteq F_{n-1}$ $\subseteq F_{n-1}$ $\subseteq F_{n-1}$ $\subseteq F_{n-1}$ $\subseteq F_{n-1}$

$B_{i_n} \subseteq F_{n-1}$ $\subseteq F_{n-1}$ $\subseteq F_{n-1}$ $\subseteq F_{n-1}$ $\subseteq F_{n-1}$ $\subseteq F_{n-1}$

$F_n = \emptyset$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$

L $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$

$B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_L}$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$

$B_{i_1}, \dots, B_{i_{k-1}}$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$

$\bigcup_{i=1}^L B_i \subseteq \bigcup_{j=1}^L \overline{B_{i_j}}$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$

$\bigcup_{B \in F_0 \setminus F_n} B \subseteq \bigcup_{i=1}^L \overline{B_{i_j}}$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$

$\bigcup_{B \in F_k \setminus F_{k+1}} B \subseteq \bigcup_{i=1}^L \overline{B_{i_{k+1}}}$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$ $\subseteq F_n$

3. Beispiel

1. $\frac{1}{2} \pi$

$$\beta \in F_1 \setminus F_{1+n}$$

ps

$$m\left(\bigcup_{i=1}^N B_{ij}\right) \leq m\left(\bigcup_{j=1}^L \bigcup_{i=1}^N B_{ij}\right) \stackrel{\text{2nd}}{\leq} \sum_{j=1}^L m\left(\bigcup_{i=1}^N B_{ij}\right) =$$

$$= 3^d \sum_{j=1}^L m(B_{ij}) \stackrel{\uparrow}{=} 3^d m\left(\bigcup_{j=1}^L B_{ij}\right)$$

2nd

~~הנהגת~~ ~~הנהגת~~ ~~הנהגת~~ ~~הנהגת~~

(Hardy - Littlewood) $\rightarrow$ viel anders

$f_{\text{sc}} \sim 180^\circ \text{ per } \lambda$ $\lambda = 375 \text{ nm}$

$$f \in L^1(\mathbb{R}^d) \quad \sim \sim$$

$$f^*(x) = \sup_{y \in B} \int_{x \in B} |f(y)| dy$$

10' 7" 3/28

 $L^7(\mathbb{R}^d)$

7. 

$$v \in (W')^{\perp} \quad |v| = 1$$

f^* e γ/σ'

ע"ס נכנס

$$0 < \alpha$$

$\delta \rightarrow \delta - \delta k$

$$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$$

Wig

$$m(\{x; |f(x)| > \alpha\}) \leq \frac{\|f\|_1}{\alpha}$$

11/11/2018

L⁹ weak

בנות

קו כחול

L^1 wpa k L^1

 γ for γ

TER

۱۱۲۸

1
161

העמוד

sk 270 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ NC Goal

$$m(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \leq c(\delta) \frac{\|f\|_1}{\alpha}$$

$c(\delta) \approx 3^\delta$ $\forall \delta$

$$E_\alpha = \{x : f^*(x) > \alpha\}$$

Step 1 Goal

~~$m(E_\alpha) \leq \frac{\|f\|_1}{\alpha}$~~ $\forall \alpha$ $\forall \delta$

~~$m(E_\alpha) \leq \frac{\|f\|_1}{\alpha}$~~

$$\frac{\|f\|_1}{\alpha} \geq m(E_\alpha)$$

$\forall \alpha$ $\forall \delta$ $\forall \delta$

$k \in E_\alpha$ ~~$k \in E_\alpha$~~ $\forall \alpha$ $\forall \delta$ $\forall \delta$

$$* m(k) \leq \frac{\|f\|_1}{\alpha}$$

$\textcircled{A}$ $\forall \alpha$ $\forall \delta$ $\forall \delta$

~~$m(E_\alpha) \leq \frac{\|f\|_1}{\alpha}$~~ $\forall \alpha$ $\forall \delta$ $\forall \delta$

* $\forall \alpha$ $\forall \delta$ $\forall \delta$ $\forall \delta$ $\forall \delta$ $\forall \delta$

$f^*(x) > \alpha$ $\forall \alpha$ $\forall \delta$ $\forall \delta$ $\forall \delta$ $\forall \delta$ $\forall \delta$

$x \in B_x$ $\forall \alpha$ $\forall \delta$ $\forall \delta$ $\forall \delta$ $\forall \delta$ $\forall \delta$

$$\int_{B_x} |f| > \alpha$$

$\rightarrow$

$\forall \alpha$ $\forall \delta$ $\forall \delta$ $\forall \delta$ $\forall \delta$ $\forall \delta$

$$\int_{B_x} |f| > \alpha$$

$\forall \alpha$ $\forall \delta$ $\forall \delta$ $\forall \delta$ $\forall \delta$ $\forall \delta$

$\{B_x\}_{x \in K}$ $\forall \alpha$ $\forall \delta$ $\forall \delta$ $\forall \delta$ $\forall \delta$ $\forall \delta$

$$\int_{B_i} |f| > \alpha m(B_i)$$

$B_1, \dots, B_N$ $\forall \alpha$ $\forall \delta$ $\forall \delta$ $\forall \delta$ $\forall \delta$ $\forall \delta$

$m(\bigcup_{j=1}^L B_{ij}) \geq \frac{1}{3} m(\bigcup_{i=1}^N B_i) \geq \frac{1}{3} m(K)$

$\int_{B_{ij}} |f| > \alpha m(B_{ij})$
 $\Downarrow$

$\int_{R^d} |f| \geq \int_{\bigcup_{j=1}^L B_{ij}} |f| > \alpha m(\bigcup_{j=1}^L B_{ij}) \geq \frac{\alpha}{3} m(K)$

$\ast \rightarrow$ we show more

$\forall \epsilon > 0$ we can find

$m(E_\alpha) \leq \frac{\epsilon}{\alpha}$

$m(E_\alpha \cap K) < \epsilon$

$m(E_\alpha) = \sup_R m(E_\alpha \cap B(0, R))$

$m(E_\alpha \cap B(0, R)) = \sup \left\{ m(F) \mid F \subseteq E_\alpha \cap B(0, R) \right\}$

$\lambda(E_\alpha) = \sup \left\{ m(I) \mid I \subseteq E_\alpha \right\}$

$0 < \epsilon$

$m(G \setminus F) < \epsilon$

$m(A) = \sup \left\{ \sum m(I_k) \mid I_k \subseteq A \right\}$



לכל $\delta > 0$ נמצא $\eta > 0$ כזה ש
 לכל $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ נכון

$$\Delta f(x) = \limsup_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \int_B |f(y) - f(x)| dy$$

$\Delta f(x) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^d$ נקרא נקודות מוסליות

Δ נקרא

הפעולה $f \mapsto \Delta f$

$\Delta f(x) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^d$ נוס

נניח Δf f נקרא Δf נקודות מוסליות

$\forall x \quad \Delta f(x) \leq f(x) + f^*(x) \quad (2)$

$\sup_{\substack{B \ni x \\ m(B) < \delta}} \int_B |f(y)| dy$

$\Delta(f+g)(x) \leq \Delta f(x) + \Delta g(x) \quad (3)$

(נניח $\tilde{c}(\delta)$ נקרא $\tilde{c}(\delta)$ נקודות מוסליות
 $\delta > 0$ נקרא $\tilde{c}(\delta)$ נקודות מוסליות

(*) $m(\{x; f(x) \geq \frac{\alpha}{2}\}) \leq c(\delta) \frac{\|f\|}{\alpha}$

(**) $m(\{x; |f(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\}) \leq \frac{\|f\|}{\alpha}$

$\delta > 0$ נקרא $\tilde{c}(\delta)$ נקודות מוסליות

$\{x; \Delta f(x) > \alpha\} \subseteq \{x; f^*(x) > \frac{\alpha}{2}\} \cup \{x; |f(x)| > \frac{\alpha}{2}\}$

(*) $m(\{x; \Delta f(x) > \alpha\}) \leq \tilde{c}(\delta) \frac{\|f\|}{\alpha}$ נוס

$\tilde{c}(\delta) = 2(3\delta + 1)$ נקרא $\tilde{c}(\delta) \leq 70\delta$ נקרא

$$\{x \in \mathbb{R}^d ; \Delta f(x) > \alpha\}$$

$$\{f \neq 0\} = \bigcup_{\alpha > 0} \{f > \alpha\}$$

$$\|f - g\|_1 < \epsilon$$

$$\Delta(f) = \Delta(g + f - g) \leq \Delta(g) + \Delta(f - g)$$

$$m(\{x ; \Delta(f) > \alpha\}) \leq m(\{x ; \Delta(f - g) > \alpha\}) \leq \tilde{C}(\delta) \frac{\|f - g\|_1}{\alpha} \leq \tilde{C}(\delta) \frac{\epsilon}{\alpha}$$

$$m(\{x ; \Delta f(x) > \alpha\}) \leq \tilde{C}(\delta) \frac{\epsilon}{\alpha}$$

$$m(\{x ; \Delta f(x) > \alpha\}) = 0$$

$$\Delta f(x) > \alpha$$

17.2

המשפט

לערך

המשפט

$$f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

המשפט

~~המשפט~~

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{B(x, \delta)} |f(y) - f(x)| dy = 0$$

המשפט

המשפט

$$\lim_{m(B) \rightarrow 0} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)| dy = 0$$

המשפט

$$\lim_{m(B) \rightarrow 0} \int_B f(y) dy = f(x)$$

המשפט

$$f \in L^1(\mathbb{R}^d) \text{ and } f^*(x) = \sup_{m(B) > 0} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| dy$$

$$f^*(x) = \sup_{m(B) > 0} \int_B |f(y)| dy$$

המשפט

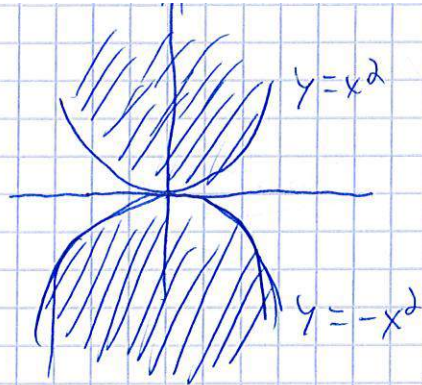
$$f(x) \leq f^*(x) \quad x \in \mathbb{R}^d$$

$$f = \mathbb{1}_A$$

$$\lim_{m(B) \rightarrow 0} \frac{m(B \cap A)}{m(B)} = \chi_A(x)$$

$$\lim_{m(B) \rightarrow 0} \frac{m(B \cap A)}{m(B)} = 1$$

המשפט



(n)

משפט

אם f היא פונקציה רציפה ב- $[a, b]$

אז קיים נקודה $\xi \in [a, b]$ כזו ש-

$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

כלומר, הערך הממוצע של f מתקבל בנקודה מסוימת.

משפט (המשפט השני)

אם f היא פונקציה רציפה ב- $[a, b]$ ו- F היא פונקציה רציפה ב- $[a, b]$ המקיימת $F'(x) = f(x)$ לכל $x \in [a, b]$, אז-

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + C$$

$$F'(x) = f(x) \quad x \in [a, b]$$

משפט

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x)$$

המשפט הראשון נקרא משפט הממוצע. המשפט השני נקרא משפט היסודי לחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי.

אם $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ היא פונקציה רציפה, אז קיים נקודה $\xi \in [a, b]$ כזו ש-

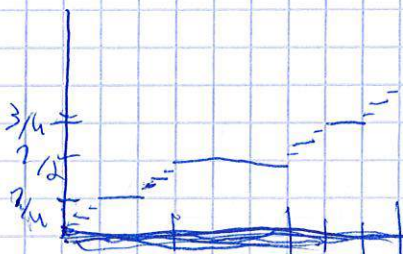
$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$$

משפט

אם f היא פונקציה רציפה ב- $[a, b]$

אז קיים נקודה $\xi \in [a, b]$ כזו ש-

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



כלומר, הערך הממוצע של f' מתקבל בנקודה מסוימת.

המשפט הראשון

המשפט השני

המשפט השלישי

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

המשפט הרביעי

$$\text{Var}_{[a,b]}(f) = \sup \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

$$\pi = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$$

$$|f(b) - f(a)| \leq \text{Var}_{[a,b]} f$$

$$\pi = \{a < b\}$$

$$\text{Var}_{[a,b]}(f) = |f(b) - f(a)|$$

$$\pi = \{a < x_1 < \dots < x_{n-1} < b\}$$

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = f(x_1) - f(x_0) = f(b) - f(a)$$

$$f(b) - f(a) \leq \sup \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

המשפט החמישי

המשפט השישי

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Var}_{[a,b]}(f) = \text{Var}_{[a,c]}(f) + \text{Var}_{[c,b]}(f)$$

C $\sim$ bounded variation $\Rightarrow$ f is $\text{Riemann integrable}$ $\Rightarrow$ f is continuous $\Rightarrow$ f is differentiable $\Rightarrow$ f is smooth

$$|f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq |f(x_i) - f(c)| + |f(c) - f(x_{i-1})|$$

Bounded Variation $\Rightarrow$ f is $\text{Riemann integrable}$ $\Rightarrow$ f is continuous $\Rightarrow$ f is differentiable $\Rightarrow$ f is smooth

$$\|f\|_{BV} = \text{Var}_{[a,b]}(f) + |f(a)|$$

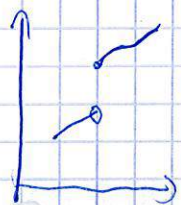
$\text{Var} f = 0$ $\Rightarrow$ $f \equiv \text{const}$ $\Rightarrow$ $|f(a)| = \text{const}$ $\Rightarrow$ $\|f\|_{BV} = \text{const}$

$\{f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R} : \|f\|_{BV} < \infty\}$

$f \in \text{BV}$ $\Rightarrow$ $\|f\|_{BV} < \infty$

f is $\text{Riemann integrable}$ $\Rightarrow$ f is continuous $\Rightarrow$ f is differentiable $\Rightarrow$ f is smooth

BV $\Rightarrow$ f is $\text{Riemann integrable}$ $\Rightarrow$ f is continuous $\Rightarrow$ f is differentiable $\Rightarrow$ f is smooth



$f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

f is $\text{Riemann integrable}$ $\Rightarrow$ f is continuous $\Rightarrow$ f is differentiable $\Rightarrow$ f is smooth

$g, h: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f = g - h$$

BV $\Rightarrow$ f is $\text{Riemann integrable}$ $\Rightarrow$ f is continuous $\Rightarrow$ f is differentiable $\Rightarrow$ f is smooth

$$g(t) = \text{Var}_{[a,t]} f$$

g is increasing $\Rightarrow$ $g(t) \geq g(s)$ $\Rightarrow$ g is non-decreasing

$$g(t) - g(s) = \text{Var}_{[s,t]} f \geq 0$$

$$h = g - f$$

$$h(t) - h(s) = \text{Var}_{[a,t]} f - \text{Var}_{[a,s]} f - (f(t) - f(s)) =$$

$$= \text{Var}_{[s,t]} f - (f(t) - f(s)) \geq 0$$

$\Downarrow$

$$\text{Var}_{[s,t]} f \geq |f(t) - f(s)|$$

... BV ... BV ...
price ...

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

... de ...

$$\text{Var}_{[0,1]} f = +\infty$$

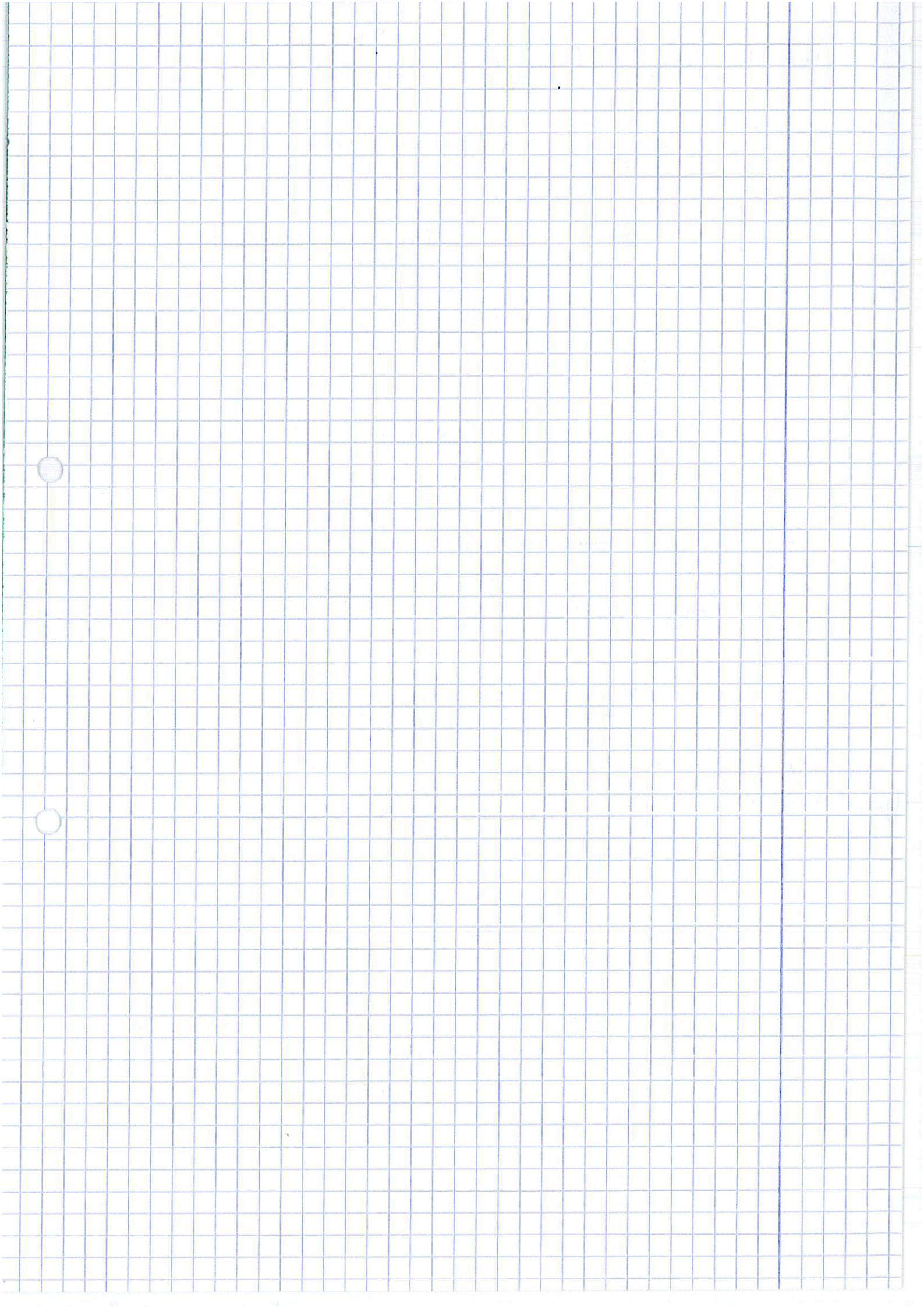
$$\text{Var}_{[a,b]} f = \sup_{\Pi} \sum |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

... [a,b] ...

$$\text{Var}_{[a,b]} f = \int_a^b |f'|$$

... = ...

$$\sum_{i=0}^N |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sum_{i=0}^N |f'(\xi_i) (x_{i+1} - x_i)| \xrightarrow{\text{Riemann}} \int_a^b |f'| dx$$



11 from veru

11.10 11.10

11.10 11.10 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 11.10

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{S^{n-1}} \left(\int_{(0, \infty)} r^{n-1} f(r\theta) dr \right) d\sigma_{n-1}(\theta)$$

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n ; |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = 1\}$$

11.10 11.10 11.10 S_{n-1} 11.10 σ_{n-1}

11.10 11.10 11.10 11.10

11.10 11.10

$$\sigma(S^{n-1}) = 1 \quad \text{11.10} \quad \sigma_{n-1} \quad \text{11.10} \quad \text{11.10}$$

11.10 11.10 11.10 11.10 11.10

$$\theta = \frac{x}{|x|} \quad r = |x| \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$$\theta \in \mathbb{R}^n \quad |\theta| = 1 \quad r \in (0, \infty) \quad x = r \cdot \theta \quad \text{11.10}$$

11.10 11.10 11.10

$$\mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^n$$

$$\mu_n = r^{n-1} dr \quad \text{11.10}$$

$$E \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{11.10}$$

$$\mu_n(E) = \int_E r^{n-1} dr$$

$$E \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{11.10} \quad \mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^n$$

$$\tilde{E} = \{t \cdot \theta ; \theta \in E, t \in (0, 1)\}$$

$$\sigma(E) = \mu_n(\tilde{E})$$

$$\text{11.10} \quad \tilde{E} \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{11.10}$$

$$d(x,y) = |x-y| \quad - \text{הפרדת נקודות} \quad x_2 = S^{h-1} \quad \text{הפרדת}$$

$$\text{ומכאן } E \subseteq S^{h-1} \quad \text{ומכאן}$$

$$\mathbb{R}^h \supseteq S^{h-1} \quad \text{ומכאן} \quad \tilde{E} \subseteq S^1$$

$$(X_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}) \rightarrow (X_1, \mathcal{F}_1, \mu_1) \quad \text{המרחב המדיאני}$$

$$\text{המרחב המדיאני} \quad \text{המרחב המדיאני} \quad \text{המרחב המדיאני}$$

$$\mu = \mu_1 \times \mathbb{P} \quad \text{המרחב המדיאני}$$

$$X_1 \times X_2 = (0, \infty) \times S^{h-1} = \{ (r, \theta) \mid r \in (0, \infty), \theta \in S^{h-1} \}$$

$$\mathbb{R}^h \supseteq X_1 \times X_2 \quad \text{המרחב המדיאני}$$

$$m(E) = \mu(E) \quad \text{המרחב המדיאני}$$

$$E_1 = (0, 1) \quad E_2 \in \mathcal{F}_2 \quad E = E_1 \times E_2 \quad \text{המרחב המדיאני}$$

$$\tilde{E}_2 = E_1 \times E_2 = E$$

$$E \subseteq E_1 \times E_2 = \tilde{E}_2$$

$$\mu_1(E_1) = \int_0^1 r^{h-1} dr = \frac{1}{h}$$

$$\mu(E) = \mu_1(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2) = \frac{1}{h} \cdot h \cdot m(\tilde{E}_2) = m(\tilde{E}_2) = m(E)$$

$$\tilde{E}_2 = E_1 \times E_2 = E$$

$$E_1 = (0, b) \quad b > 0 \quad \text{המרחב המדיאני}$$

$$\mu_1(E_1) = \int_0^b r^{h-1} dr = \frac{1}{h} b^h$$

$$E = E_1 \times E_2 = (0, b) \times E_2 = \tilde{E}_2 \quad \text{המרחב המדיאני}$$

$$\mu(E) = \mu_1(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2) = \frac{1}{h} b^h \cdot m(\tilde{E}_2) = b^h \cdot m(\frac{1}{b^h} E) = \frac{1}{b^h} \cdot b^h \cdot m(E) = m(E)$$

$E_1 = (0, 9]$

מה קר סדר סדר סדר סדר סדר סדר סדר סדר סדר סדר

$E_1 = (a, b)$

$E_1 \in F_1$

$E \subseteq \mathbb{R}^n - \{0\}$

$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i$

$B_i \in \mathcal{S}^{n-1}$

$f = 1_E$

$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$

$m(B^n)$

$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi |x|^2} d m_2(x)$

$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi |x|^2} d m_2(x) = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} e^{-\pi r^2} dr \right) d\theta =$

$= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi = 1$

$2 \cdot m(B_2) = 2\pi$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x^2+y^2)} dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi(x^2+y^2)} dx dy = 1$$

(1)

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} dx = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi(x_1^2+x_2^2)} dx_1 dx_2 \int_{\mathbb{R}^{n-2}} e^{-\pi(x_3^2+\dots+x_n^2)} dx_3 \dots dx_n = 1 \cdot 1 = 1$$

(2)

$$1 = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} dx = \left(\int_0^\infty e^{-\pi r^2} \cdot r^{n-1} dr \right) \cdot \omega_{n-1}$$

(3)

$$\omega_{n-1} \int_0^\infty e^{-\pi r^2} r^{n-1} dr = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty r^{t-1} e^{-r} dr$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} dx = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|} \frac{d}{d|x|} e^{-\pi|x|^2} dx$$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$