

10.1

$$L^1(\mu) = \{ f \mid \int |f| d\mu < \infty \}$$

$f \in L^1(\mu)$ נקראת פונקציה אינטגרלית

האינטגרל של f הוא $\int f d\mu$

$$\int_A f d\mu = \int f \cdot \chi_A d\mu$$

אם $f \in L^1(\mu)$ אז $\int f d\mu$ קיים ויחיד

$L^1(\mathbb{R}^n)$ היא מרחב וקטורי

הנורמה $\|f\|_1 = \int |f| d\mu$ מקיימת את כל תכונות הנורמה

$$\|f\|_1 = \int |f| d\mu$$

$L^1(\mu)$ היא מרחב מטרות

המרחב $L^1(\mu)$ הוא מרחב מטרות

$$d(f, g) = \|f - g\|_1$$

* המרחב $L^1(\mu)$ הוא מרחב מטרות

אם $f, g \in L^1(\mu)$ אז $f + g \in L^1(\mu)$ ו- $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$

אם $f \in L^1(\mu)$ ו- $c \in \mathbb{R}$ אז $cf \in L^1(\mu)$ ו- $\|cf\|_1 = |c| \|f\|_1$

משפט

אם $f_n \in L^1(\mu)$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in L^1(\mu)$

וכן

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N \|f_m - f_n\|_1 < \epsilon$$

הקדמה

$$\epsilon = \frac{1}{2^k}$$

הקדמה

$$N_1 < N_2 < N_3 \dots$$

$$\epsilon = \frac{1}{2^k}$$

הקדמה

הקדמה

הקדמה

הקדמה

$$\|f_{N_{k+1}} - f_{N_k}\|_1 < \frac{1}{2^k}$$

הקדמה

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} |f_{N_{k+1}} - f_{N_k}| d\mu < \infty$$

הקדמה

~~הקדמה~~ , הקדמה

$$\int_{\Omega} \sum_{k=1}^{\infty} |f_{N_{k+1}} - f_{N_k}| d\mu < \infty$$

הקדמה / הקדמה

הקדמה

הקדמה

הקדמה

הקדמה

הקדמה

הקדמה

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{N_{k+1}}(x) - f_{N_k}(x)$$

הקדמה

הקדמה

הקדמה

$$\sum_{k=1}^M f_{N_{k+1}} - f_{N_k} = f_{N_{M+1}} - f_{N_1}$$

הקדמה

$$f_{N_{m+1}} - f_{N_1}$$

הקדמה

$$f = \lim_{m \rightarrow \infty} f_{N_m}$$

הקדמה

$$\|f - f_{N_m}\|_{L^1}$$

הקדמה

הקדמה

הקדמה

הקדמה

הקדמה

הקדמה

הקדמה

הקדמה

$$g = 2(|f_{N_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{N_{k+1}} - f_{N_k}|)$$

$$|f_{N_m}| = |f_1 + (f_{N_m} - f_1)| = |f_1 + \sum_{k=1}^{m-1} f_{N_{k+1}} - f_{N_k}| \leq \frac{g}{2}$$

$f \in L^1$ $f \in L^1$ $f \in L^1$ $f \in L^1$

$|f_n - f| \leq g$

$\int |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\{f_n\}$ $L^1(\mu)$ $f \in L^1(\mu)$

$\{f_n\}$ $L^1(\mu)$ $f \in L^1(\mu)$

$L^p(\mu)$ $\int |f|^p < \infty$

$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}$

$L^p(\mu)$

$\|f\|_\infty = \inf \{t > 0 ; \mu(\{|f| > t\}) = 0\}$

$L^1(\mathbb{R}^n)$ $L^1(\mathbb{R}^n)$

$\int_{\mathbb{R}^n} f(x+b) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mu(x)$

$\int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda x) d\mu(x) = \frac{1}{|\lambda|^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mu(x)$

$L^1(\mathbb{R}^n)$ וסדר $\mathbb{R}^n$ וסדר

$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ו $b \in \mathbb{R}^n$ וסדר

$$T_b(f(x)) = f(x-b)$$

$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

סדר

לענין

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|T_h f - f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 0$$

מכאן

נניח f וסדר

נניח f וסדר

סדר $\mathbb{R}^n$ וסדר

$\mathbb{R}^n \geq k$

נניח f וסדר

נניח f וסדר

סדר

ע

δ

נניח f וסדר

נניח f וסדר

נניח f וסדר

נניח f וסדר

נניח f וסדר

נניח f וסדר

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n$

$|x-y| < \delta$

$|f(x) - f(y)| < \epsilon$

$\mathbb{R}^n$

δ

k

נניח f וסדר

נניח f וסדר

$\mathbb{R}^n$ וסדר נניח f וסדר

$\tilde{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$

$\tilde{K} \ni x,y$

נניח f וסדר

נניח f וסדר

נניח f וסדר

נניח f וסדר

נניח f וסדר

נניח f וסדר

$f(x) = f(y) = 0$

$|x-y| < \delta$

$x \in \tilde{K}$

נניח f וסדר

$\forall h \in \mathbb{R}^n$
 $x \in \mathbb{R}^n$

$|h| < \delta$

$|f(x-h) - f(x)| < \epsilon$

נניח f וסדר

$\forall h \in \mathbb{R}^n$
 $|h| < \delta$

נניח f וסדר

$|T_h f(x) - f(x)| < \epsilon$

$\forall |h| < \delta$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_h f - f| = \int_{\tilde{K}} |T_h f - f| < \epsilon \cdot m(\tilde{K})$$

$\|T_h f - f\| < \epsilon$

ע

נניח f וסדר

נניח f וסדר

נניח f וסדר

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|T_h f - f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

$|h| < \delta$

נניח f וסדר

אם $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ אז $T_h f \rightarrow f$ ב- L^1

אם $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ אז $T_h f \rightarrow f$ ב- L^1

אם $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ אז $T_h f \rightarrow f$ ב- L^1

$$\|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \frac{\epsilon}{3}$$

אם $0 < \delta < \epsilon$ אז $\|T_h g - g\|_1 < \frac{\epsilon}{3}$

$$|h| < \delta \rightarrow \|T_h g - g\|_1 < \frac{\epsilon}{3}$$

$h < \delta$ אז

$$\|T_h f - f\|_1 \leq \|T_h f - T_h g\|_1 + \|T_h g - g\|_1 + \|g - f\|_1 =$$

$$= 2\|f - g\|_1 + \|T_h g - g\|_1 \leq \frac{2}{3}\epsilon + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

אם $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ אז $T_h f \rightarrow f$ ב- L^1

אם $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ אז $T_h f \rightarrow f$ ב- L^1

$$\int_{\mathbb{R}^n} \theta = 1$$

$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ אז $T_h f \rightarrow f$ ב- L^1

$$f * \theta_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \theta_\epsilon(y) dy$$

$$\theta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \theta\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \|f * \theta_\epsilon - f\|_1 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

(צג מציג, מן המסך, מן המסך, מן המסך)

הוכחה (משפט)

הוכחה: נניח $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ונניח $\Omega = (0,1)^2 \in \mathbb{R}^2$

נניח $\Omega = (0,1)^2 \in \mathbb{R}^2$

(הוכחה - מניחה שיש פונקציה f המוגדרת על Ω ופונקציה g המוגדרת על Ω ופונקציה h המוגדרת על Ω)

נניח $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ונניח $\Omega = (0,1)^2 \in \mathbb{R}^2$

נניח $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ונניח $\Omega = (0,1)^2 \in \mathbb{R}^2$

נניח $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ונניח $\Omega = (0,1)^2 \in \mathbb{R}^2$

נניח $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ונניח $\Omega = (0,1)^2 \in \mathbb{R}^2$

נניח $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ונניח $\Omega = (0,1)^2 \in \mathbb{R}^2$

נניח $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ונניח $\Omega = (0,1)^2 \in \mathbb{R}^2$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(x) dx = m(A) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A$$

נניח $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ונניח $\Omega = (0,1)^2 \in \mathbb{R}^2$

נניח $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ונניח $\Omega = (0,1)^2 \in \mathbb{R}^2$

נניח $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ונניח $\Omega = (0,1)^2 \in \mathbb{R}^2$

נניח $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ונניח $\Omega = (0,1)^2 \in \mathbb{R}^2$

נניח $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ונניח $\Omega = (0,1)^2 \in \mathbb{R}^2$

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_h^y \right) dy = \int_{\mathbb{R}^2} f_h$$

$F \ni f_h$ $\rightarrow$ y $\rightarrow$ f_h^y

$\sim \leftarrow h$ $\rightarrow$ (f_h^y) $\rightarrow$ f_h^y

$$y \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f_h^y$$

$$y \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f^y$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_h^y \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f^y$$

(f^y) $\rightarrow$ f^y $\rightarrow$ f^y

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_h^y \right) dy \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f^y \right) dy$$

(f_h^y) $\rightarrow$ f^y $\rightarrow$ f^y

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_h \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} f$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f^y \right) dy \leftarrow \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_h^y \right) dy = \int_{\mathbb{R}^2} f_h \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} f$$

$$y \rightarrow f^y \rightarrow f^y$$

$$f^y \rightarrow f^y$$

$\gamma_A \rightarrow \text{S/P}$, M/M/S

$$f_n \nearrow \uparrow_A$$

[illegible]

$$R_n = [a, b] \times [c, d] \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$$

$$Z \rightarrow 1, a, b, c$$

$$R = \frac{[a, b] \times [c, d]}{1}$$

גמיה יקוועלג - ניקא נ, פ, ר/ר' נ, ה צ/ו-נ

A ? $\nu_{\text{Si}, \text{Ne}}$ $\frac{7}{20}$ $\gamma_{\text{Si}, \text{Ne}}$

2) $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{1}{2} m v \frac{dv}{dt}$

1/2 ק"מ 0.5 מ"ס 2 מ"מ 1/2 ק"מ

$$\mathbb{I}_A \wedge \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{R_k} \in \mathcal{F} \quad \text{w. j. d.} \quad \mathbb{I}_{R_k} \in \mathcal{F}$$

$$F \ni \mathbb{1}_A \quad | \quad \psi \quad | \quad W \ni \mathbb{1}_A \quad |$$

1. Voronoi Diagram $(\text{Voronoi}$ $\text{Diagram})$
 2. Voronoi Diagram $(\text{Voronoi}$ $\text{Diagram})$

ה'ס"ה, סוף חמשה עשר
אדר, ה'א

אם $F \in (0,1)^2$ אז

1. $\sim$ so f se $\sim$ r

$$m(F) = \inf \left\{ m(G) \mid \begin{array}{l} \text{and } G \\ F \subseteq G \end{array} \right\}$$

$$m(\tilde{G}_h) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \frac{w}{m(F)} \quad \sim \ln \ln \tilde{G}_h \quad \sim \frac{1}{\lambda} \ln \ln \tilde{G}_h$$

$$G_h = (G, 1)^2 \cap \bigcap_{i=1}^n \tilde{G}_i \cap \left\{ x; d(x, F) \leq \frac{1}{n} \right\} \quad \text{Fe } \tilde{G}_h$$

$$m(F) \leq m(G_n) \leq m(\tilde{G}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m(F)$$

$$F \subseteq G_n$$

$$G_{n+1} \subseteq G_n$$

לפיכך

$$F \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x ; d(x, F) < \frac{1}{n} \right\} = F$$

↓
לפיכך

(x-2) פתרון יש

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} |x - y|$$

(x-2) נוסף פתרון

$$F_\epsilon = \left\{ x ; d(x, F) < \epsilon \right\}$$

x ∉ F
~~x ∈ F~~ נכונה

לכן F ∈ M

נראה כי

$$d(x, F) > 0$$

שכן

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} F_{\frac{1}{k}} = F \Leftrightarrow \exists \epsilon > 0$$

נראה כי

$$\mathbb{1}_F = \mathbb{1}_{(0,1)^2} - \mathbb{1}_G$$

נראה כי

$$\mathbb{1}_F \in \mathcal{F}$$

$$\mathbb{1}_G \in \mathcal{F}$$

לכן

לפיכך

$$\mathbb{1}_A \in \mathcal{F}$$

שכן

נראה כי

$$A \subseteq (0,1)^2$$

(5)

k ∈ N

ע

לכן

נראה כי

לפיכך

$$F_k \subseteq A \subseteq G_k$$

לפיכך

נראה כי

$$m(G_k \setminus F_k) < \frac{1}{k}$$

לכן

נראה כי

לפיכך

נראה כי

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$$

$$\supset G_k \sim k$$

$$\bigcup_{k=1}^k F_k$$

לכן

$$F_k$$

נראה כי

$$F_k \subseteq F_{k+1}$$

נראה כי

לפיכך

$$\forall k$$

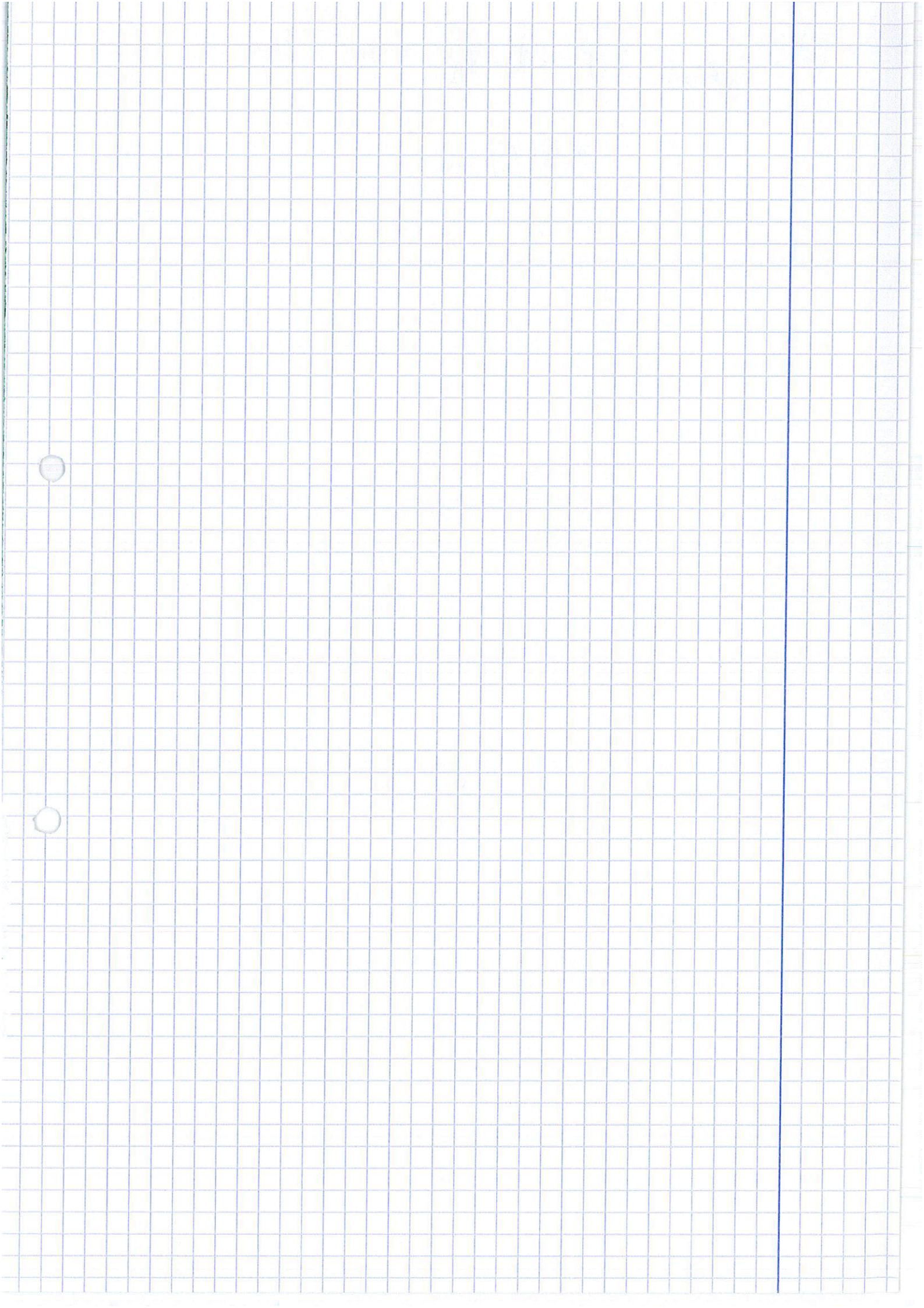
$$G_k \supseteq G_{k+1}$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = \underline{A} \subseteq A \subseteq \bar{A} = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$$

לפיכך

$$\underline{A} \subseteq A \subseteq \bar{A} \quad f \rightarrow \mathbb{I}_{\bar{A}} \cdot \mathbb{I}_A \quad \text{converges} \quad \mu \ll \nu$$

$$m(\bar{A} \setminus \underline{A}) = 0 \quad \text{e/}$$



10.2

הוכחה

נניח

Fubini

הוכחה

$$f^y(x) = f(x, y)$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y)$$

1/20

היה

$$f \in L^1(\mathbb{R}^2)$$

נניח

היה

$$f^y$$

$$y \in \mathbb{R}$$

היה

היה

1

היה

היה

היה

היה

$$\int f^y = \lambda(y)$$

$$= \lambda(y)$$

היה

2

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \lambda(y) dy = \int_{\mathbb{R}^2} f$$

3

הוכחה נעשה

היה

היה

היה

היה

היה

היה

היה

היה

היה

היה

$$f \in L^1(\mathbb{R}^2)$$

היה

היה

היה

היה

היה

היה

היה

היה

היה

היה

היה

היה

$$1_A \in F$$

היה

$$m(A) < \infty$$

היה

היה

5

6

$$F_n \in A \subseteq G_n$$

$$\downarrow$$

$$\downarrow$$

היה

$$m(G_n \setminus F_n) \leq \frac{1}{n}$$

היה

היה

היה

היה

היה

$$1_{F_n} \nearrow 1_A \in F$$



$$1_{G_n} \searrow 1_A \in F$$

$$A \subseteq A \subseteq \bar{A}$$

$$\searrow$$

$$m(\bar{A}) = m(A) = m(\underline{A})$$

היה

$$\searrow$$

$$m(\bar{A} \setminus \underline{A}) = 0$$

$$\underline{l}(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\underline{A}}^y(x) dx \quad \underline{l}(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\underline{A}}^y(x) dx \quad \text{row}$$

$$F \ni \mathbb{1}_{\underline{A}}, \mathbb{1}_{\bar{A}} \quad \text{row}$$

$$\underline{l}, \bar{l} \quad \text{row}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \underline{l}(y) dy = m(\underline{A})$$

$$\int_{\mathbb{R}} \bar{l}(y) dy = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\bar{A}} = m(\bar{A})$$

$$\int_{\mathbb{R}} \underline{l} = \int_{\mathbb{R}} \bar{l}$$

stc

$$\underline{l} \leq \bar{l}$$

e row

$$0 \quad \text{row} \quad \bar{l} - \underline{l} \geq 0 \quad \text{stc}$$

$$\underline{l}(y) = \bar{l}(y) \quad \text{row}$$

$$\bar{l}(y) = \underline{l}(y) \quad \text{row}$$

$$m(\underline{A}^y) = m(\bar{A}^y)$$

$$B^y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in B\}$$

$$B^y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in B\}$$

$$\underline{A}^y \subseteq A^y \subseteq \bar{A}^y$$

stc

$$y \text{ row } \bar{A}^y \quad \text{row}$$

$$m^*(A^y \setminus \bar{A}^y) = 0 \quad \text{row}$$

$$m^* \downarrow$$

$$m(A^y) = m(\underline{A}^y) = m(\bar{A}^y)$$

$$(\underline{l}, \bar{l}) \quad \text{row}$$

$$\underline{l}(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\underline{A}}^y dx = m(\underline{A}^y) \quad -1$$

$$\int_{\mathbb{R}} \underline{l}(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \bar{l}(y) dy = m(\bar{A}) = m(\underline{A})$$

$$F \ni \mathbb{1}_{\underline{A}_i} \quad \text{row}$$

$$F \ni \sum_{i=1}^N a_i \mathbb{1}_{\underline{A}_i} \quad \text{row}$$

$$m(\underline{A}_i) < \infty \quad \text{row}$$

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbb{1}_{A_i}$$

$$(m(A) < \infty) \quad \text{or} \quad \text{or} \quad A_i \quad \text{or} \quad \underline{a_i \geq 0} \quad \text{or}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbb{1}_{A_i} \rightarrow f$$

$$\bigcap$$

$$f \in \mathcal{F}$$

$$f \geq$$

$$f \text{ is simple}$$

$$\text{If } f \in L^1(\mu) \text{ then } f \in L^1(\mu) \text{ and } L^1(\mu) = \mathcal{F}$$

$$f = |f| - (|f| - f)$$

$$f \in \mathcal{F}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f, g)$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) b(x) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} f$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} g \mid 0 \leq g \leq f, g \text{ simple} \right\}$$

$$g_n \rightarrow f$$

$$g_n \rightarrow f, \quad \max(g_1, \dots, g_n)$$

משפט

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g_n(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^2} g_n$$

משפט פטו-וילקסון $\rightarrow$ $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^2} f$

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy \geq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g_n(x, y) dx \right) dy \rightarrow +\infty$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy = +\infty \iff \int_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$$

משפט 13.32 $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ①: משפט

$$m(A) = \int_{\mathbb{R}} m(A^y) dy$$

$$A^y = \{x; (x, y) \in A\}$$

משפט 13.33 $f = \mathbb{1}_A$ $\rightarrow$ משפט

משפט 13.34 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{hypo-graph}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq f(x)\}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f = m_2(\text{hypo-graph}(f))$$

משפט 13.35 $f \in L^1(\mathbb{R})$ $\rightarrow$ משפט

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} \cos(xy) f(x) dx$$

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} f(x) dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f} g = \int_{\mathbb{R}} f \hat{g}$$

$L^2(\mathbb{R}) \ni f, g$

משפט 13.36

עמק רע גרע (גאנץ $\hat{f}$ צו $1, x, y$) Hand
 איז?

$\mathbb{R}^2$ צו $1, x, y$ $f(x)g(y)\cos(xy)$ צו $1, x, y$

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)g(y)\cos(xy)| dx dy \leq \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)g(y)| dx dy$$

$0 \leq |f(x)g(y)|$ א $1, x, y$ גענוג

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)|g(y)| dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy < \infty$$

(צו $1, x, y$ איז גענוג)

$f(x)g(y)\cos(xy)$
 " $h(x,y)$

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(x,y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(x,y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} g(y)f(y) dy$$

(צו $1, x, y$ איז גענוג)

$$f(x,y) \quad \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

א $1, x, y$ גענוג

$$(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2) = (\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1) \quad \text{א $1, x, y$ גענוג}$$

~~א $1, x, y$ גענוג~~

$$(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}, \mu) \quad \text{א $1, x, y$ גענוג}$$

א $1, x, y$ גענוג $A \in \mathcal{F}_1$ א $1, x, y$ גענוג $B \in \mathcal{F}_2$ א $1, x, y$ גענוג

$$\mu(A \times B) = \mu_1(A) \cdot \mu_2(B)$$

הקדמה

1. הקדמה

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\int_0^x f(t) dt \right) \stackrel{a.e.}{=} f(x)$$

הקדמה

הקדמה

הקדמה

הקדמה

הקדמה

הקדמה

10 f, g L^1

$$L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$$

המרחב

המרחב

$$L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$$

המרחב L^1 הוא המרחב

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$$

המרחב L^1 הוא המרחב

$$(f \stackrel{a.e.}{=} g) \Leftrightarrow f \stackrel{L^1}{=} g$$

$$f \stackrel{L^1}{=} g$$

$$\|f\|_{L^1} = \int |f| d\mu$$

הנורמה L^1

$$L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \|f\|_1 < \infty\}$$

המרחב

$$f_n \xrightarrow{L^1} f$$

$$f, f_1, f_2, \dots \in L^1(\Omega)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_1 = 0$$

$$\text{המרחב } L^1(\Omega) \text{ הוא המרחב}$$

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$f_n \xrightarrow{L^1} f$$

$$f \in L^1(\Omega)$$

$$f_n \xrightarrow{L^1} f$$

$$f_n \xrightarrow{L^1} f$$

$$f_n \xrightarrow{L^1} f$$

$$f_n \xrightarrow{L^1} f$$

$$0 < \epsilon < \infty \implies \|f - f_n\|_1 \geq \epsilon \implies \int |f - f_n| d\mu \geq \epsilon \cdot m\{|f_n - f| > \epsilon\}$$

(2)

$$f_h(x) = h \mathbb{1}_{(0, \frac{1}{h})}$$

המשפט הראשון

המשפט הראשון (המשפט הראשון)

$$f_h \xrightarrow{m} 0$$

ש"ל

$$\|f_h - 0\|_1 = \int_{[0,1]} |f_h| = h \cdot h(0, \frac{1}{h}) = 1$$

ש"ל

$$f_h \not\xrightarrow{m} 0$$

ש"ל

$$\|f_h - 0\|_1 \not\rightarrow 0$$

ש"ל

$$i=1,2 \quad (\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mu_i)$$

Fubini

ש"ל

המשפט

ש"ל

המשפט

המשפט הראשון

$$\mu_1 \times \mu_2$$

המשפט הראשון

ש"ל

$$\Omega_1 \times \Omega_2$$

ש"ל

המשפט

המשפט

$$\sigma(F_1 \times F_2)$$

המשפט הראשון

$$(\mu_1 \times \mu_2)(E \times F) = \mu_1(E) \mu_2(F)$$

המשפט הראשון

$$E \in \mathcal{F}_1, F \in \mathcal{F}_2$$

המשפט הראשון (המשפט הראשון)

$$\mu_1 \times \mu_2$$

המשפט הראשון (המשפט הראשון)

המשפט הראשון

ש"ל

המשפט הראשון

ש"ל

(המשפט הראשון)

המשפט הראשון

$$f(x,y) \in L^1_0(\Omega_1 \times \Omega_2)$$

ש"ל

ש"ל

$$y \in \Omega_2$$

ש"ל

המשפט הראשון

ש"ל

$$L^1(\Omega_1) \ni f^y(x) = f(x,y)$$

ש"ל

$$L^1(\Omega_2) \ni \int_{\Omega_1} f^y(x) d\mu_1(x)$$

ש"ל

$$\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d(\mu_1 \times \mu_2)$$

$\mathbb{R}^n$ $n \geq 0$ induction

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) d\mu_n &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, \dots, x_n) d\mu_{n-1}(x_2, \dots, x_n) \right) d\mu_1(x_1) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1 \end{aligned}$$

$$\mathcal{G}^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} x_i \geq 0 \quad \forall i \\ \sum_{i=1}^n x_i \leq 1 \end{array} \right\}$$

$m(\mathcal{G}^n)$

$$f(x) = \mathbb{1}_{\mathcal{G}^n}(x)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = m(\mathcal{G}^n)$$

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) d\mu_n(x_1, \dots, x_n) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, \dots, x_n) d\mu_{n-1}(x_2, \dots, x_n) dx_1$$

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \mathbb{1}_{\mathcal{G}^n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{1}_{\mathcal{G}^n}\left(0, \frac{x_1}{1-x_1}, \dots, \frac{x_n}{1-x_1}\right) \\ &= f\left(0, \frac{x_1}{1-x_1}, \dots, \frac{x_n}{1-x_1}\right) \end{aligned}$$



$$\int f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) d\mu_n = \frac{1}{|\alpha|^n} \int f(x_1, \dots, x_n) d\mu_n(x)$$

$$I_n = \int_{[0,1]} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n}_{I_{n-1}} dx_1$$

$$I_n = I_{n-1} \cdot \frac{1}{n}$$

$$I_1 = 1$$

$$\boxed{I_n = \frac{1}{n!}}$$

$$f \in L^1([0,1])$$

$$g(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt$$

$$g \in L^1([0,1])$$

$$\int_{[0,1]} f = \int_{[0,1]} g$$

$$h(x,y) = \frac{f(x)}{x} \cdot \mathbb{1}_{\{y \leq x\}}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\int_0^1 |h(x,y)| dy \right] dx &= \int_0^1 \int_0^x \frac{f(x)}{x} dy dx = \\ &= \int_0^1 |f(x)| dx < \infty \end{aligned}$$

$$\int \int |h| dy dx < \infty$$

$$\int_{\mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2} |h| < \infty$$

(f, g) \in L^1 \times L^1 \Rightarrow \int \int f \cdot g < \infty