

13/10/2013

ד"ר אוריאל שניידר

587 (682)

math.tau.ac.il/~klartagb/real\_2013.html

מחבר: אוריאל שניידר  
מקום: תל אביב  
שנה: 2013

שם: אוריאל שניידר

מקום: תל אביב

שם: אוריאל שניידר

Henri Lebesgue

Emile Borel

שם: אוריאל שניידר

שם: אוריאל שניידר

שם: אוריאל שניידר

שם: אוריאל שניידר

שם: אוריאל שניידר

שם: אוריאל שניידר

שם: אוריאל שניידר

שם: אוריאל שניידר

שם: אוריאל שניידר

שם: אוריאל שניידר

$(X, d)$

$$d(x, y) = |x - y|$$

$$X = \mathbb{R}$$

$$y, x \in \mathbb{R}^n$$

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

$$x \in X$$

$$X \supseteq \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$d(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$d(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$(x, y) \rightarrow (x', y')$$

$$x = x'$$

$$y = y'$$

$$x_n \rightarrow x$$

$$x_n \rightarrow x'$$

$$0 \leq d(x, x') \leq d(x, x_n) + d(x_n, x') \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$



$$x = x'$$

$$d(x, x') = 0$$

$$d(x, x') = 0$$

$$d(x, x') = 0$$

$$B(x_0, r)$$

$$(X, d)$$

$$\{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$$

$$A \subseteq X$$

$$x \in A$$

$$x \in A$$

$$A \subseteq X$$

$$r > 0$$

$$A$$

$$A$$

$$A$$

$$A$$

$$A$$

$$A$$

$$A$$

$$A$$

$$A$$

$$A$$

$$A$$

$$B(x, r) \subseteq A$$

$$B(x, r) \subseteq A$$

$$B(x, r) \subseteq A$$

$$B(x, r) \subseteq A$$

$$B(x, r) \subseteq A$$

$$B(x, r) \subseteq A$$

$$B(x, r) \subseteq A$$

$$B(x, r) \subseteq A$$

$$R$$

$$R$$

$$R$$

$$R$$

$$R$$

$$R$$

$$R$$

$$R$$

$$R$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$a < x < b$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

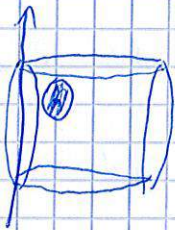
$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

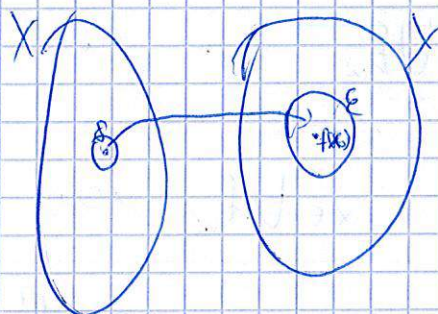


~~(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \geq 1$  A use "p.w."  $\frac{1}{2^n}$~~

$(\delta \text{ ענין})$   $\forall \epsilon > 0$   $\exists \delta > 0$   $\forall x \in X$   $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$   
 $\{x_n\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_0, \frac{1}{n})$

$(x, d_x) \sim (x, d_x)$   $\sim$   $\text{נחלק}$   
 $f: X \rightarrow Y$

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X$   
 $d_x(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$



$f: X \rightarrow Y$   $\sim$   $\text{נחלק}$   $U \subseteq Y$   
 $f^{-1}(U) = \{x \in X : f(x) \in U\}$

$x_0 \in X$   $f: X \rightarrow Y$   $\sim$   $\text{נחלק}$   $\{x_n\} \subseteq X$

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0)$$

$(x, d_x)$   $\sim$   $\text{נחלק}$   $d_y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$

$\epsilon > 0$   $\exists \delta > 0$   $\forall x \in X$   $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$

$\epsilon > 0$   $\exists \delta > 0$   $\forall x \in X$   $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$

$d(x_n, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x_n), f(x_0)) < \epsilon$

$d(f(x_n), f(x_0)) < \epsilon$

$\exists x \in B(x_0, \delta)$   $\epsilon > 0$   $\exists \delta > 0$   $\forall x \in X$   $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$

$\exists x \in B(x_0, \delta)$   $\epsilon > 0$   $\exists \delta > 0$   $\forall x \in X$   $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$

$x \leftarrow x_n$   $\delta = \frac{1}{n}$   $f(x) \in B(f(x_0), \epsilon)$   
 $f(x_n) \in B(f(x_0), \epsilon)$

היחס  $\sim$  הוא  
 (3)  $\sim$  הוא  
 $\sim$  הוא  
 $\sim$  הוא

~~היחס  $\sim$  הוא~~

$\sim$  הוא

$A \subseteq \mathbb{R}$  הוא קטע סגור  $A = [a, b]$

היחס  $\sim$  הוא

$\sim$  הוא

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n - \frac{1}{2^n}, a_n + \frac{1}{2^n})$  הוא קטע סגור  $A = [a, b]$

$(0, 1) \cup \{1\} = (0, 2) \setminus \{1\}$   $\sim$  הוא

$A \subseteq \mathbb{R}$  הוא קטע סגור  $A = [a, b]$

~~היחס  $\sim$  הוא~~

$[(-\infty, a) \cup (a, \infty)]$  הוא קטע סגור  $A = [a, b]$

היחס  $\sim$  הוא

$I \subseteq J \subseteq A$  הוא קטע סגור  $A = [a, b]$

$x_0 \in I \subseteq A$  הוא קטע סגור  $A = [a, b]$

היחס  $\sim$  הוא

$\alpha_* = \inf \{ \alpha < x_0 \mid (\alpha, x_0) \in A \}$   $\beta_* = \sup \{ \beta > x_0 \mid (x_0, \beta) \in A \}$

$\alpha_* < x_0 < \beta_*$  הוא קטע סגור  $A = [a, b]$

$x \in (\alpha_*, x_0]$  וכן  $\sup A$ ,  $x \in A$   $x \in [x_0, \beta) \subseteq A$  (כאשר  $[x_0, \beta) \subseteq A$ )  
 $(\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ כזה ש- } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \implies x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon))$   
 $\implies \sup A = x_0$

נניח  $(\alpha_*, \beta_*) \subseteq A$  ונניח  $\alpha < \alpha_*$  וכן  $\beta_* < \beta$   
 $(\alpha, \beta) \subseteq A$

נניח  $\beta_* < \beta$  וכן  $[x, \beta) \subseteq A$  שכן  $\beta_* < \beta$

$[x_0, \beta) \subseteq A$  ע"פ  $\beta$  שם  $\sup A = \beta_*$  וכן  $\alpha < \alpha_*$   
 נניח  $A \supseteq (\alpha_*, \beta_*)$

$A$  היא אוסף סגור וכן  $\sup A = \beta_*$

נניח  $A \supseteq (\alpha_*, \beta_*)$  וכן  $A \supseteq [\alpha_*, \beta_*)$

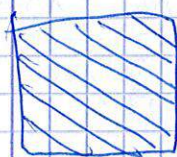
נניח  $I, J$  אינן ריקות וכן  $I \cup J = A$

$I \cup J = A$  וכן  $I \cap J = \emptyset$

נניח  $I \cup J = A$  וכן  $I = I \cup J$

$I \neq J$

נניח  $A$  היא אוסף סגור



נניח  $A$  היא אוסף סגור

7.1  
(4)

$x \in X$   $A \subseteq X$   $\Leftrightarrow$   $x \in \text{cl}(A)$   $\Leftrightarrow$   $x \in A$  or  $x \in \text{cl}(A) \setminus A$

$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \in A$   $\Leftrightarrow$   $A \supseteq \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

$B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$   $\Leftrightarrow$   $x_0 \in \text{cl}(A)$

$x \in A$   $\Leftrightarrow$   $x \in \text{cl}(A)$

$x_n \in A \cap B(x_0, \frac{1}{n})$   $\Leftrightarrow$   $x_0 \in \text{cl}(A)$

$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$   $\Leftrightarrow$   $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$

$|x_n - x_0| < r$   $\Leftrightarrow$   $x_n \in B(x_0, r)$

$x_n \in B(x_0, r) \cap A$   $\Leftrightarrow$   $A \cap B(x_0, r) \neq \emptyset$

$\bar{A} = A \cup \text{cl}(A \setminus A)$

$\text{int}(A) = A^\circ$

$x_0 \in A$   $\Leftrightarrow$   $x_0 \in \text{cl}(A)$   $\Leftrightarrow$   $A \subseteq \bar{A}$

$[0, 1]$   $\subseteq \mathbb{R}$   $\Leftrightarrow$   $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$

$A = \bar{A}$   $\Leftrightarrow$   $A$  is closed

מסלול קטן  
 $\|c\|_1 = \|c\|_1$

מרחב  $X \setminus A$  סגור  $A \in X$

$R^n$  (ק)  $\emptyset \neq R^n$  (מרחב מוקד)

$x_0 \in \bar{A}$   
 ~~$x_0 \in A$~~

אם  $x_0 \in A$  ניקח  $x_0 \in A$   $\Rightarrow$  מרחב

(מרחב)  $A \subseteq A$  וסגור  $A \subseteq \bar{A}$   $\Rightarrow A = \bar{A}$   $\Leftrightarrow$   $A$  סגור

מרחב  $X \setminus A$  סגור  $\Leftrightarrow$   $\beta(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$   $\forall r > 0$   
 $\beta(x_0, r) \subseteq X \setminus A$

הערה:  
 כל מרחב סגור  
 יש  $\Rightarrow$  סגור  
 כל  $\Rightarrow$  back slash

נניח  $\beta(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$   $\forall r > 0$   $x_0 \in \bar{A}$  הנניח

$x_0 \in X \setminus A$   $\Rightarrow$   $A$  סגור  $\Leftarrow$

$x_0 \in \beta(x_0, r)$   $\Rightarrow$   $x_0 \in A$   $\Rightarrow$   $A$  סגור

מרחב קטן  $r$  סגור?

$x_0 \in \beta(x_0, r)$   $\Rightarrow$   $x_0 \in A$   $\Rightarrow$   $A$  סגור

נניח  $\beta(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$   $\forall r > 0$   $x_0 \in \bar{A}$   $\Rightarrow$   $A$  סגור

$x_0 \in \bar{A} = A$   $\Rightarrow$   $A$  סגור

מרחב סגור

קבוצה  $E \subseteq A$  סגורה  $\Leftrightarrow$   $E \subseteq \bar{E}$   $\Leftrightarrow$   $E$  סגורה

(מרחב סגור)  $A \subseteq \bar{A}$   $\Rightarrow$   $A$  סגור

$X$  סגור

$\bar{Q} = R$   $\Rightarrow$   $R$  סגור  $\Rightarrow$   $R$  סגור

$R^n = \bar{Q}^n$   $\Rightarrow$   $R^n$  סגור  $\Rightarrow$   $R^n$  סגור

קבוצה סגורה  $A \subseteq X$  סגורה  $\Leftrightarrow$   $A \subseteq \bar{A}$   $\Leftrightarrow$   $A$  סגורה

קבוצה סגורה  $A \subseteq X$  סגורה  $\Leftrightarrow$   $A \subseteq \bar{A}$   $\Leftrightarrow$   $A$  סגורה

מרחב קטן  $r$  סגור

$\sup \{ \beta(x, y) \mid x, y \in A \} < \infty$

מרחב סגור  $\Rightarrow$   $A \subseteq \bar{A}$   $\Leftrightarrow$   $A$  סגור



$$E_n = \left(\frac{1}{n}, 2\right) \text{ and } \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = (0, 2] \quad k \subseteq [0, 1] \quad (1)$$

$$k \subseteq (0, 2] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

$E_n$  is a subinterval of  $(0, 2]$  and  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = (0, 2]$

$k = [0, 1]$  is a subinterval of  $(-1, 1)$  and  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = (0, 2]$

$$\left(\frac{1}{n}, 2\right) \cup (-1, 1)$$

and  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = (0, 2]$

$$E_n = \left(\frac{1}{n}, 2\right) \text{ and } [0, 1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cup \{0\}$$

and  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = (0, 2]$

and  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = (0, 2]$

and  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = (0, 2]$

$$k \subseteq \bigcup_{l=1}^{\infty} E_l$$

$$k \subseteq \bigcup_{l=1}^N E_l \quad \text{for } N \text{ large enough}$$

and  $\bigcup_{l=1}^N E_l = (0, 2]$

$$x_n \in k \cap \bigcup_{l=1}^N E_l \quad \text{for } n \geq N$$

$x \in k$  and  $x_n \in k$  for  $n \geq N$

and  $\bigcup_{l=1}^N E_l = (0, 2]$

$$x \in B(x, \epsilon) \subseteq E_l$$

$$x_{n_j} \notin \bigcup_{l=1}^N E_l \Rightarrow x_{n_j} \notin E_l$$

$$B(x, \epsilon) \not\subseteq E_l$$

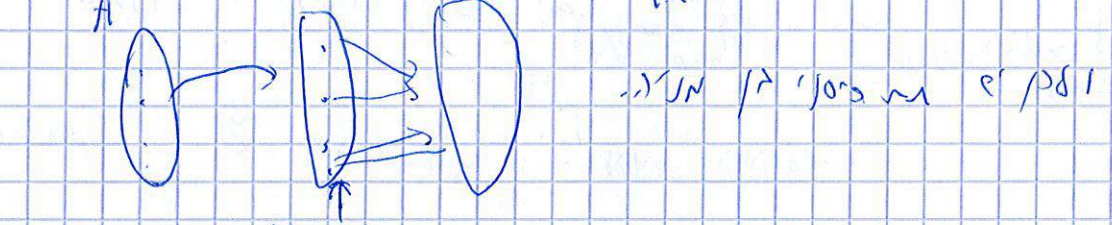
$\{x_n\}$  is a sequence in  $\mathbb{R}^n$  such that  $x_n \in A$  for all  $n$ .  
 We want to show that  $A$  is closed.

Let  $\{x_n\}$  be a sequence in  $A$  such that  $x_n \rightarrow x$ .  
 We want to show that  $x \in A$ .  
 Let  $x_n = (\alpha_n, \beta_n)$  and  $x = (\alpha, \beta)$ .  
 Then  $\alpha_n \rightarrow \alpha$  and  $\beta_n \rightarrow \beta$ .

Since  $x_n \in A$ , we have  $\alpha_n \in \mathbb{R}$  and  $\beta_n \in \mathbb{R}$ .  
 Therefore,  $\alpha \in \mathbb{R}$  and  $\beta \in \mathbb{R}$ .  
 Hence,  $x \in A$ .

Let  $x_n = (\alpha_n, \beta_n)$  and  $x = (\alpha, \beta)$ .  
 Then  $\alpha_n \rightarrow \alpha$  and  $\beta_n \rightarrow \beta$ .  
 Since  $x_n \in A$ , we have  $\alpha_n \in \mathbb{R}$  and  $\beta_n \in \mathbb{R}$ .

Therefore,  $\alpha \in \mathbb{R}$  and  $\beta \in \mathbb{R}$ .  
 Hence,  $x \in A$ .



Let  $x_n = (\alpha_n, \beta_n)$  and  $x = (\alpha, \beta)$ .  
 Then  $\alpha_n \rightarrow \alpha$  and  $\beta_n \rightarrow \beta$ .  
 Since  $x_n \in A$ , we have  $\alpha_n \in \mathbb{R}$  and  $\beta_n \in \mathbb{R}$ .

Therefore,  $\alpha \in \mathbb{R}$  and  $\beta \in \mathbb{R}$ .  
 Hence,  $x \in A$ .

Let  $x_n = (\alpha_n, \beta_n)$  and  $x = (\alpha, \beta)$ .  
 Then  $\alpha_n \rightarrow \alpha$  and  $\beta_n \rightarrow \beta$ .  
 Since  $x_n \in A$ , we have  $\alpha_n \in \mathbb{R}$  and  $\beta_n \in \mathbb{R}$ .

Therefore,  $\alpha \in \mathbb{R}$  and  $\beta \in \mathbb{R}$ .  
 Hence,  $x \in A$ .



~~הקדמה~~  
~~(5) הקדמה~~

7      8/8/11      ~~מ' עמ' 11~~      ~~הקדמה~~      ~~הקדמה~~

15/11

Urigrupe@post.tau.ac.il      8" N

www.math.tau.ac.il/~urigrupe/real.html      11/10

הקדמה      8/8/11      11/10      15/11      11/10

הקדמה      8/8/11      11/10      15/11      11/10

הקדמה      8/8/11      11/10      15/11      11/10

הקדמה      8/8/11      11/10      15/11      11/10

הקדמה      8/8/11      11/10      15/11      11/10

$$\{R_n\} = \{(x_{n1}, x_{n2}) \times (y_{n1}, y_{n2})\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |R_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (|x_{n2} - x_{n1}| \cdot |y_{n2} - y_{n1}|) \leq \epsilon$$

$$\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon}{N}}$$

$$[0,1] \times \{0\}$$

$$|R| = 4 \cdot \frac{\epsilon}{4} \leq \epsilon$$

$\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$

100  $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$  1.1 - 1.2 1.3 1.4 1.5

$\frac{1}{2} N$  (GP) value score

$$A_n = \mathbb{Q} \times \bigcup_{i=1}^n R_i$$

An der Welle

(i) 20/21

7 p's 18  $A_n$   $\langle n \rangle$   $\frac{1}{2} \leq A_n$  de 16es (ii)

$$A_n \subset A_{n-1} \quad \text{wskwskw} \quad (iii)$$

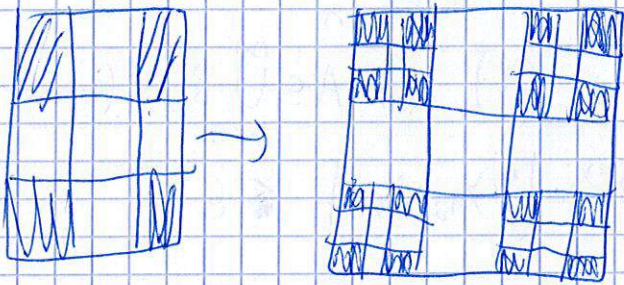
$$\bigcap_{h=1}^{\infty} A_h = \emptyset \quad (iv)$$

10/5/20 50-10000 100000 1000000 1-3 1000000

$\frac{1}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

iv)  $\int \ln x \cdot x^2 dx$

$R^2$      $\Delta$     קטן    קטן     $C$      $\sim$      $\sim$



$$A_0 = [0, 1] \times [0, 1] \quad \text{ist } \mathbb{R}^2 \text{ und } \mathbb{R}^2$$

$$p_{12} \rightarrow g \quad s, \quad p_{12} \rightarrow A_n > \quad p_{12} \rightarrow d > \quad h+1 \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow$$

$\frac{1}{2} \log(1-\gamma)$      $\frac{1}{2} \log(1-\gamma)$      $\frac{1}{2} \log(1-\gamma)$      $\frac{1}{2} \log(1-\gamma)$      $\frac{1}{2} \log(1-\gamma)$      $\frac{1}{2} \log(1-\gamma)$

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{slci} \quad \text{"(AJJ)"}$$

C se wssw

$\sqrt{120}$   $\gamma_j$   $20$   $3/17/c$   $100$   $A_h$   $1$   $\sqrt{120}$   $0$

שם תאריך חודש שנה

$$(2) \text{ 例 } (1)$$

12

1. C 8

C.

1/10/2018

18.  $f(x) = x^2 - 2x + 1$   $g(x) = x^2 - 4x + 4$   $h(x) = x^2 - 6x + 9$   $i(x) = x^2 - 8x + 16$   $j(x) = x^2 - 10x + 25$

10/1/21 2021 10/1/21 10/1/21 10/1/21

1/1000 (10%) 1/1000 1/1000 1/1000

(3)

$\frac{1}{g^n}$   $\sim$   $\sim$   $\sim$   $A_n$   
 $\sim$   $A_n$   $\sim$   $\sim$   $\sim$

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad e \quad \frac{1}{n!} \quad \left(\frac{4}{9}\right)^n + \frac{0}{2} \quad \text{100\%} \quad \text{100\%}$$

C 5 1105 108 55

$$\left(\frac{4}{9}\right)^h + \frac{6}{2} \leq 6 \quad f(5^2, 180) \quad h \quad 1/28$$

$\rho^2 \rightarrow$

(F<sub>6</sub> ~ 10) 15-20)

[illegible]

1.  $\mathbb{N}$  is a subring of  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  /  $\mathbb{Z}$

$$B(x, \rho) \subseteq \bigcup_{x \in A} B(x, \rho) \quad \text{and} \quad \bigcup_{x \in A} B(x, \rho) \subseteq B(x, \rho) \quad \text{if } x \in A \quad \text{if } x \in A$$
$$e \mapsto r \leq p \quad - \quad p \in B(x, p) \quad \mathcal{N}, \mathcal{N}', \gamma$$
$$x \in \overline{B(p, r)} \subseteq B(x, \rho) \subseteq A \quad r \in \mathbb{Q} \quad \& \quad \sim \{r, r'\} \quad \text{für} \quad p \in \mathbb{Q}^2$$

$\mathbb{P}$  auf  $\mathbb{R}^n$  durch  $\mathbb{P}(x) = \frac{1}{2} \|x\|^2$  und  $\mathbb{P}(y) = \frac{1}{2} \|y\|^2$

$$A \subseteq \bigcup_{x \in A} B_x$$

/108

108/108 ~~108~~ 108/108

$$\bigcup_{x \in A} B_x \subseteq A \quad \text{ver}$$

$$\bigcup_{x \in A} B_x = A \quad /108$$

$$|\{B_x \mid x \in A\}| \leq \aleph_0 \quad /101$$