פונקציות ממשיות - תרגול 9

14.12.10

פונקציות רציפות בהחלט

תזכורת:
$f : I \to \mathbb{R}$ תקרא רציפה בהחלט (AC) אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל אוסף קטעים $\{(x_i, x_i')\}$ המקיים:

$$\sum_i |x_i - x_i'| < \delta$$

אזי

$$\sum_i |f(x_i) - f(x_i')| < \varepsilon$$

הערה: הגדרה מקורית מדבר על קבוצה סופית של קטעים אבל כרגיל גם קבוצה בת מניה זה בסדר.

תרגיל:
תהיה E קבוצה כך ש- $m(E) = 0$.
הראו כי קיימת פונקציה בעלת השתנות חסומה המקיימת $\forall x \in E\ f'(x) = \infty$.
ראינו שלכל פונקציה מונוטונית קיימת נגזרת כב"מ . השתנות חסומה זה הפרש של מונוטוניות לכן גם לה.

הוכחה. E מדידה, ולכן אפשר למצוא קבוצה פתוחה E_n כך ש- $E \subseteq E_n$ וכן, $m(E_n) = m(E_n) - m(E) = m(E_n \setminus E) < \frac{1}{2^n}$
נגדיר

$$f_n(x) := \int_{-\infty}^{x} \chi_{E_n}(t)dt$$

ראינו בכיתה כי $f_n(x)$ גזירה כב"מ. מדוע? כע אינטגרל מהצורה הזאת הוא רציף אבסולוטי absolutly continues. או עולה
מצד שני,

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \chi_{E_n}(t)dt = m(E_n \cap [-\infty, x]) \leq \frac{1}{2^n}$$

נגדיר $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{x} \chi_{E_n}(t)dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$
קיבלנו ש- $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(t)dt = h(t)$ כב"מ,
ממסקנה ממשפט באפו־לוי h_n אינטגרביליות וידוע כי $\sum \int |h_n| < \infty$ אז $\sum h_n$ מתכנס לפונקציה אינטגרבילית כב"מ ומתקיים: $\int \sum h_n = \sum \int h_n$
ומתקיים

$f(x)=\int_{-\infty}^{x}\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}(t)dt$
הסכום אינטגרבילי, קיבלנו ש- $f\in AC$ כי אינטגרל של פונקציה . אז f בעלת השתנות חסומה.

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}(x)=\begin{cases}\infty, & x\in E\cap E_n\\ , & x\not\in E\end{cases}$$

$x\in\bigcap_n E_n\Leftrightarrow x\in E$ $\square$

הגדרה. אם $f:I\to\mathbb{R}$ בעלת השתנות חסומה והנגזרת כ"במ $f'(x)=0$ אז נקרא ל- f פונקציה סינגולרית.

תרגיל:
הראו כי כל פונקציה $f:I\to\mathbb{R}$ בעלת השתנות חסומה הינה סכום של פונקציה סינגולרית $g:I\to\mathbb{R}$ ופונקציה $h:I\to\mathbb{R}\in AC$.
פתרון: f בעלת השתנות חסומה ולכן קיימת כב"מ f'.
נגדיר

$$h(x)=\int_a^x f'(t)dt\int AC$$

ואז $g(x)=f(x)-h(x)$ והיא סינגולרית כי
כב"מ
$$g'(x)=f'(x)-h'(x)=f'(x)-f'(x)=0$$

תרגיל: מצאו $f\in AC([\varepsilon,1])$ לכל $\varepsilon>0$ אבל $f\notin AC([0,1])$ ורציפה ב- 0.
פתרון:

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

תרגיל: אם בנוסף ידוע כי $Var_{[0,1]}(f)<\infty$ אז כן $f\in AC[0,1]$.
לדוגמא: $f(x)=\sqrt{x}\in AC([0,1])$
פתרון: לכל $\varepsilon>0$ קיים $\eta\in(0,1]$ כך ש-

$$(1)Var_{[0,\eta]}f<\frac{\varepsilon}{2}$$

וזה כי ראינו בשיעורי בית שעבור f רציפה הפונקציה $Var_{[0,\eta]}(f)$ רציפה. ולכן כאשר $\eta\to 0$ מתקיים $Var_{[0,\eta]}(f)\to 0$
כיוון ש $f\in AC([\eta,1])$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $\{(x_i,x_i')\}$ ב־ $[\eta,1]$ קטעים זרים המקיימים

$$\sum_i|x_i-x_i'|<\delta$$

מתקיים

$$(2)\sum|f(x_i)-f(x_i')|<\frac{\varepsilon}{2}$$

עכשיו יהיו

$$\{(y_i, y_i')\}$$

אוסף קטעים זרים ב– $[0,1]$. שמתקיים

$$\sum_i |y_i - y_i'| < \delta$$

$$\sum_i |f(y_i) - f(y_i')| \leq Var_{[0,\eta]}(f) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

תרגיל: אם $f \in AC$ אז f היא ליפשיץ $\Leftrightarrow$ $|f'|$ חסומה כב"מ.
פתרון: $\Leftarrow$ אם f ליפשיץ אז לכל x, y

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq M$$

נשאיף $x\ to\ y$ כב"מ

$$|f'(x)| \leq M$$

$\Rightarrow$
ידוע $|f'(x)| < M$ כב"מ.

$$|f(x) - f(y)| \stackrel{1}{=} |\int_y^x f'(x)dx| \stackrel{2}{\leq} |int_y^x M| = M$$

1 מנוסחת ניוטון לייבניץ כי $f \in AC$. 2 כי $|f'(x)| < M$ כב"מ.
תרגיל משיעורי בית:
חשבו

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1 + \frac{x}{n})^n e^{-2x} dx$$

פתרון:
נסמן $f_n(x) := \chi_{[0,n]}(x) \cdot (1 + \frac{x}{n})^n e^{-2x}$
מתקיים: 1. $f_n \nearrow$ סדרה עולה.
2. $\int_0^\infty f_n(x) \leq c$
ממשפט ההתכנסות המונוטונית (באפולוי)

$$f_n(x) \to f(x) = \chi_{[0,\infty]} e^x e^{-2x}$$

כב"מ

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x) = \int \lim f_n(x) = \int f(x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x) = \int_0^\infty \chi_{[0,\infty]} e^{-x} dx = 1$$