פונקציות ממשיות ־ תרגול 8

7.12.10

פונקציות בעלות השתנות חסומה

f בעלת השתנות חסומה בקטע $I=[a,b]$ אם

$$Var_I(f)=\sup_{\text{כל החלוקות}}\sum|f(x_i)-f(x_{i-1})|<\infty$$

כאשר $\Delta=a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$.

הערה. פונקציות בעלות השתנות חסומה הינה הפרש של שתי פונקציות מונוטוניות ולכן הנגזרת קיימת כב"מ.

תרגיל:
הראו כי ההשתנות של הפונקציה אינה חסומה בקטע $[0,1]$

$$f(x)=\begin{cases}x\sin(\frac{1}{x}), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

פתרון:
נבחר את החלוקה הבאה: עבור n אי־זוגי:

$$\Delta_n=0<\frac{2}{\pi(2n-1)}<\frac{2}{\pi(2n-3)}<\ldots<\frac{2}{\pi}<1$$

ובאופן כללי

$$x_k=\frac{2}{\pi(2n-k+1)}=\frac{1}{\pi(n-k)}+\frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\frac{1}{x_k})=\sin((n-k)\pi+\frac{\pi}{2})=\cos((n-k)\pi)=(-1)^{n-k}=(-1)^{1+k}$$

$$|f(x_k)-f(x_{k-1})|=|x_k+x_{k-1}|\geq 2|x_{k-1}|$$

$$Var_I(f)\geq\sum_{k=0}^{n+1}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\geq 2\sum_{k=0}^{n+1}|x_{k-1}|\geq\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{|(n-k)\pi-\frac{1}{2}|}\sim 2+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n-k}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+1=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k}\xrightarrow[n\to\infty]{}\sum_{k=0}^{\infty}=\infty$$

תרגיל המשך: עבור אילו ערכי α הפונקציה הבאה:

$$f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin(\frac{1}{x}), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

היא בעלת השתנות חסומה ב-$I=[0,1]$?

הערה. אם $f\in C^1(I)$ אז,

$$Var_I(f)\leq\int_I|f'(x)|dx$$

הוכחה. עבור חלוקה כלשהי $x_0,x_1,\ldots,x_n$ לפי משפט ערך הביניים קיים $x_{k-1}<t_k<x_k$ כך ש-

$$\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}=f'(t_k)$$

$$|f(x_k)-f(x_{k-1})|=|f'(t_k)||x_k-x_{k-1}|$$

נסתכל בסכום

$$\sum_{k=0}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=\sum_{k=0}^{n}|f'(t_k)||x_k-x_{k-1}|$$

נשאיף בשני האגפים את n לאינסוף:

$$Var_I(f)=\int_I|f'(t)|dt$$

הערה. זה נכון רק אם f רציפה בהחלט.

$\square$

פתרון תרגיל המשך:

בכל קטע $[\varepsilon,1]$ $\varepsilon>0$ נגזור:

$$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\sin(\frac{1}{x})-x^{\alpha-2}\cos(\frac{1}{x})$$

אם $\alpha>2$ ברור שיהיה בסדר - הנגזרת תהיה פונקציה חסומה.

לכל $\alpha>1$:

$$Var_{[\varepsilon,1]}(f)\leq\int_{\varepsilon}^{1}|\alpha x^{\alpha-1}|dx+\int_{\varepsilon}^{1}|x^{\alpha-2}|dx$$

$$\int_{\varepsilon}^{1} |\alpha x^{\alpha-1}|dx \sim \alpha(1-\varepsilon^{\alpha})$$

$$\int_{\varepsilon}^{1} |x^{\alpha-2}|dx \sim 1-\varepsilon^{\alpha-1}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} Var_{[\varepsilon,1]}(f) < \infty$$

בשיעורי בית 7 ראינו ש- $Var_{[0,x]}(f)$ היא פונקציה רציפה ולכן

$$Var_{[0,1]}(f) = \lim_{\varepsilon\to 0} Var_{[\varepsilon,1]}(f)$$

כאשר $\alpha \geq 1$ ניקח אותה חלוקה כמו מקודם $x_k = \frac{1}{\pi(x-k)+\pi_2}$

$$Var_I(x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}) \geq 2\sum|\frac{1}{x_{k-1}}|^{\alpha} \geq 2+2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(n-k)^{\alpha}}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(n-k)^{\alpha}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}} \underset{\substack{n\to\infty\\ \alpha\leq 1}}{\longrightarrow} \infty$$

הערות. 1. אם f פונקצית ליפשיץ אזי f בעלת השתנות חסומה.

2. אם f גזירה והנגזרת שלה חסומה אז f בעלת השתנות חסומה (כי אז היא בפרט ליפשיץ).

פונקציות רציפות בהחלט

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ תקרא רציפה בהחלט (AC) אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל אוסף קטעים זרים $\{(x_i,x_i')\}$ המקיים:

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i'-x_i| < \delta$$

מתקיים:

$$\sum|f(x_i')-f(x_i)| < \varepsilon$$

תכונות:

1. אם $f\in AC$ אז היא בוודאי רציפה. ההפך אינו נכון.

2. כל פונקציה מהצורה

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + f(a)$$

הינה פוקנציה רציפה בהחלט.

3. אם $f \in AC$ אז $Var_I(f) < \infty$.

ההפך אינו נכון. וגם כמסקנה ש-$f \in AC$ קיימת f' כב"מ.

4. אם $F \in AC$ אזי

$$F(X) = \int_a^x F'(x)dt + F(a)$$

כלומר אפשר לשחזר אותה מהנגזרת שלה.

תרגיל:
אם f ליפשיץ אז היא בפרט $f \in AC$.

הוכחה. אם f ליפשיץ אז קיים M כך שלכל $(x,y) \in I$

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$$

לכל $\varepsilon > 0$ נמצא $\delta > 0$ כך שלכל אוסף קטעים זרים $\{(x_i, x_i')\}$ המקיים:

$$\sum_{i=1}^n |x_i' - x_i| < \delta$$

$$\sum |f(x_i') - f(x_i)| \leq \sum_{i=1}^n M|x_i' - x_i| < M \cdot \delta$$

לכן אם נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ נקבל את הדרוש.

□

הערה. כל פונקציה גזירה שהנגזרת שלה חסומה היא בפרט פונקצית ליפשיץ ולכן AC.

תרגיל:
הראו כי פונקצית קנטור אינה רציפה בהחלט.
פתרון: f מונוטונית עולה מ-0 ל-1 ובנסוף

$$f'(x) = 0$$

מצד שני לפי תכונה 4:

$$f(1) = \int_0^1 f'(x)dx + f(0) = 0$$

סתירה.
זו גם דוגמא לפונקציה רציפה שאיננה AC. לפונקציה כזאת קוראים פונקציה סינגולרית.