פונקציות ממשיות - תרגול 7

30.11.10

משפטי התכנסות והחלפת הסדר בין הגבול לאינטגרל

משפט. באפו-לוי (המונוטונית)
התנאים:
כב"מ מתקיים:

$$f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n$$

f_n אינטגרבילית כך ש- $\forall n \int f_n \leq c$ אז:

1. $\exists \lim f_n = f$ כב"מ.
2. f אינטגרבילית ומתקיים $\int f \leq c$.
3. $\lim \int f_n = \int \lim f_n = \int f$.

משפט. *Faton*
בתנאים:

1. $0 \leq f_n \in \mathcal{L}$.
2. $\int f_n \leq c$.
3. $f_n \to f$ כב"מ.

אז
$f \in \mathcal{L}$ ו- $\int f \leq c$.

משפט. ההתכנסות הנשלטת (הדומיננטית)
התנאים:

1. f_n מדידות.
2. קיימת מז'ורנטה אינטגרבילית $\forall n |f_n| \leq g \in \mathcal{L}$.
3. $\lim f_n = f$ כב"מ.

אזי:

1. $f \in \mathcal{L}$.
2. $\int f = \int \lim f_n = \lim \int f_n$.

תרגיל:
נוכיח את אי־שוויון מרקוב:
עבור $f \geq 0$ $f \in \mathcal{L}(A)$:

$$m\{x \in A | f(x) \geq t\} \leq \frac{\int_A f d\mu}{t}$$

הוכחה. נסמן:

$$E_t := \{x \in A | f(x) \geq t\}$$

$$\int_A f dm \geq \int_{E_t} f dm \geq \int_{E_t} t dm = t \int_{E_t} 1 dm = t m(E_t)$$

□

מסקנה. ממשפט באו־לוי
אם $f_n \in \mathcal{L}$ ונתון:

$$c = \sum_{n=1}^{\infty} (\int |f_n|) \leq \infty$$

אז

1. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס כב"מ.
2. $\int f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$

תרגיל:
הוכיחו שהטור הבא מתכנס כב"מ בין 0 ל- π:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt{|\sin(nx)|}}$$

פתרון:
נסתכל ב-

$$0 \leq h_n = \frac{1}{n^2 \sqrt{|\sin(nx)|}}$$

ונגדיר

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{|\sin(x)|}}$$

אינטגרבילית כי כי בסביבות $x = 0$ אפשר לקרב ע"י $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ וזה אינטגרבילי ($\frac{2}{\pi}\theta \leq \sin\theta \leq \theta$).
לכן,

$$\int\limits_0^{\pi} f(x) < c$$

כעת נכתוב:

$$\int\limits_0^{\pi} f(nx)dx \underset{\substack{t=nx,\\ dt=ndx}}{=} \int\limits_0^{n\pi} f(t)dt \overset{*}{=} \frac{1}{n} n \int_0^{\pi} f(t)dt = c$$

* כי $f(t)$ מחזורית π.

$$\int_0^{\pi} h_n(x) = \int_0^{\pi} \frac{1}{n^2} f(nx)dx = \frac{c}{n^2}$$

ולכן,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} h_n(x) = c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

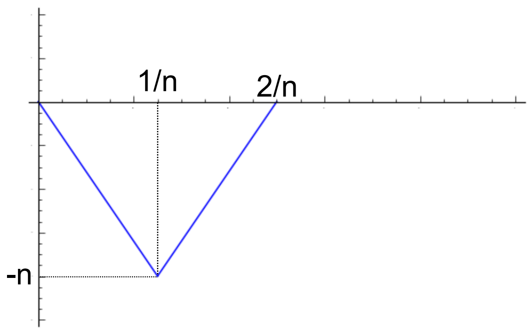
ולפי מסקנה ממשפט באפו־לוי נקבל ש- $h(x) = \sum h_n(x)$ כב"מ.

תרגיל:
הראו שהתנאי $f_n \geq 0$ במשפט פטו הינו הכרחי. כלומר מצאו סדרה $f_n \to f$ כב"מ כך שגם $\forall n \int f_n \leq M$ אבל :

1. f אינטגרבילית עם $\int f > M$.
2. f אינה אינטגרבילית.

פתרון:

1. f_n =



$$\forall n \int_{[0,1]} f_n = -1 = M$$

אבל כב"מ

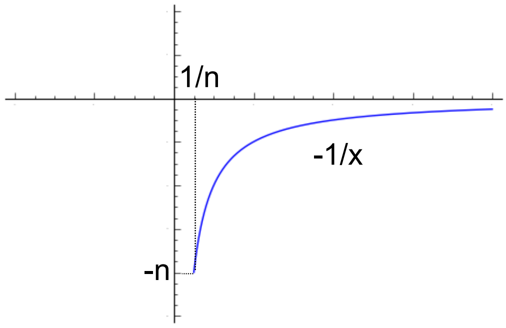
$$\lim f_n = 0$$

$$\int \lim f_n = \int 0 = 0$$

ולכן קיבלנו,

$$-1 = M = \int f_n \leq \int f = 0$$

.2 $f_n =$



$$\int f_n \leq 0 = M$$

$$\lim f_n = -\frac{1}{x} = f(x)$$

אבל $\frac{1}{x}$ אינה אינטגרבילית.

תרגיל: אם f פונקציה גזירה ומדידה אז f' מדידה.
פתרון:

$$f'(x) = \lim \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$$

נסמן:

$$f_n(x) := \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$$

f_n פונקציות מדידות המתכנסות ל- f נקודתית ולכן מתכנסות לפונקציה מדידה.

דוגמא. פונקציה גזירה ב־ $[0,1]$ אשר נגזרתה אינה אינטגרבילית לבג ב־ $[0,1]$.

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos(\frac{\pi}{x^2}), & 0<x\leq 1\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\cos(\frac{\pi}{x^2})+\frac{2\pi}{x}\sin(\frac{\pi}{x^2}), & 0<x\leq 1\\ 0, & x=0\end{cases}$$

f' מדידה אבל אינה אינטגרבילית על $[0,1]$. נבחר $0<\alpha<\beta\leq 1$ בקטע זה f' רציפה ולכן

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx=f(\beta)-f(\alpha)=\beta^2\cos(\frac{\pi}{\beta^2})-\alpha^2\cos(\frac{\pi}{\alpha^2})$$

נבחר $\alpha_n=\sqrt{\frac{2}{4n+1}}$, $\beta_n=\sqrt{\frac{1}{2n}}$
הקטעים $[\alpha_n,\beta_n]$ זרים בזוגות.
$[\alpha_1,\beta_1]=[\sqrt{\frac{2}{5}},\sqrt{frac12}]$ $[\alpha_2,\beta_2]=[\sqrt{\frac{2}{9}},\sqrt{frac14}]$
נסמן $E:=\bigcup_{n=1}^{\infty}[\alpha_n,\beta_n]\subseteq[0,1]$

$$\int_E|f'(x)|dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha_n}^{\beta_n}|f'(x)|dx\geq\sum_{n=1}^{\infty}|\int_{\alpha_n}^{\beta_n}f'(x)dx|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\infty$$

ולכן f' לא אינטגרבילית לבג.

השתנות חסומה

נאמר של־f השתנות חסומה בקטע $[a,b]$ אם

$$T_a^b(f)=\sup_{\text{כל החלוקות}}\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|<\infty$$

תרגיל:
הראו כי ההשתנות של הפונקציה אינה חסומה בקטע $[0,1]$

$$f(x)=\begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

פתרון:
נבחר את החלוקה הבאה: עבור n אי־זוגי:

$$\Delta_n=0<\frac{2}{\pi(2n-1)}<\frac{2}{\pi(2n-3)}<\ldots<\frac{2}{\pi}<1$$

המשך בתרגול הבא.