פונקציות ממשיות - תרגיל 6

23.11.10

סיום הדוגמא

$$\varphi_a(t)=\begin{cases}(t-a)^2\sin\left(\frac{1}{t-a}\right), & t\neq a\\ 0, & t=a\end{cases}$$

E קבוצת קנטור מוכללת $m(E)>0$.

$$f(x)=\begin{cases}\varphi_{a_n}(x), & a_n<x<a_n+y_n\\ \varphi_{a_n}(a_n+y_n), & a_n+y_n\leq x\leq b_n-y_n\\ -\varphi_{b_n}(x), & b_n-y_n<x<b_n\\ 0, & x\in E\end{cases}$$

רצינו להראות שתי טענות.

1. הפונקציה גזירה ובכל $x\in E$ נגזרתה 0.
2. הנגזרת אינה רציפה בנקודה E.

הוכחה.

1. הפונקציה גזירה בכל $x\in(a_n,b_n)$ כי הפוקציות שבחרנו בהגדרה גזירות. לכל $x\in E$ נחשב, $f(x)-f(t)$. אם $t\in E$ ברור. אם $t\in(a_n,b_n)$ נחלק למקרים:

$t\in(a_n,a_n+y_n)$

$$|f(x)-f(t)|=|0-f(t)|=|(t-a_n)^2\sin\frac{1}{t-a_n}|\leq|t-a_n|^2\leq|t-x|^2$$

$$\Rightarrow\frac{|f(x)-f(t)|}{|t-x|}\leq|t-x|$$

במקרה זה הנגזרת תהיה 0.

$t\in(a_n+y_n,b_n-y_n)$

$$t \in (b_n - y_n, b_n)$$

באופן דומה נקבל בכל המקרים

$$|f(x) - f(t)| \leq |t - x|^2$$

ונקבל שהנגזרת היא 0.

סה"כ קיימת הנגזרת בכל נקודה ובכל $x \in E$ $f'(x) = 0$.

2. בכל קטע (a_n, b_n) אפשר לקחת סדרה $b_n > \dfrac{a + n\frac{1}{\pi k}}{x_k} > a_n$ עבור k מספיק גדול.

ראינו ש-

$$\varphi_a'(x) = \begin{cases} 2(x-a)\sin\left(\frac{1}{x-a}\right) - (x-a)^2\cos\left(\frac{1}{x-a}\right), & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$$

$$\cos(x_k) = \cos\frac{1}{\frac{1}{\pi k}} = \cos(\pi k) = (-1)^k$$

זה מראה שניתן לבחור שתי תתי־סדרות של x_kכך שעבורן לא יהיה קיים הגבול של הנגזרת.

הראנו שבכל קטע (a_n, b_n) הראנו שלא קיים הגבול של הנגזרת כאשר שואפים ל- a_n, לכן הנגזרת בנקודות E אינה רציפה (זה עדין כי הראנו ל-a_n וצריך להסביר למה זה נכון ל- $x \in E$).

$\square$

פונקציות מונוטוניות

אם לכל $y > x$ מתקיים $f(x) \leq f(y)$ אומרים ש- f מונוטונית עולה.
תכונות:

1. כל נקודות האי־רציפות של פונקציות מונוטוניות הן מסוג קפיצה.
2. מספר נקודות אי־רציפות של פונקציה מונוטונית הוא לכל היותר בן־מניה.

הסבר: לכל נקודת אי־רציפות מתאימה קפיצה יחידה $[f(x), f(y)]$ ובכל קטע כזה אפשר לבחור רציונלי.

אינטגרציה לפי לבג

הגדרנו בכמה שלבים:
עבור פונקציה פשוטה

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$$

$\{A_i\}$ קבוצות מדידות.

$$\int \varphi dx = \sum a_i m(A_i)$$

ואז עבור פונקציה מדידה וחסומה (על $m(E) < \infty$).

$$\int_E f = \inf_{\psi < f \text{ פשוטות}} \int_E \psi$$

עבור פונקציה מדידה אי־שלילית, $m(E) < \infty$, $f \geq 0$

$$\int_E f = \sup_{h \leq f \text{ מדידה, חסומה ומתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה סופית}} \int_E f_n$$

ועבור פונקציה f מדידה נאמר ש- $f = f^+ - f^-$ אינטגרבילית אם f^+, f^- אינטגרביליות.
נסמן $f \in L(\Omega)$ אם f אינטגרבילית לבג על Ω.
תרגיל:
הראו שאם f אינטגרבילית ב-E גם $|f|$ אינטגרבילית שם ומתקיים

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|$$

האם מכך ש- $|f|$ אינטגרבילית ניתן להסיק f אינטגרבילית?
פתרון:

$$\begin{aligned} \left| \int_E f \right| = \left| \int_E f^+ - \int_E f^- \right| \leq \left| \int_E f^+ \right| - \left| \int_E f^- \right| = \\ = \int_E f^+ - \int_E f^- = \int_E f^+ - f^- = \int_E |f| \end{aligned} \tag{1}$$

וכמובן ש- $|f| = f^+ + f^-$ בכלל אינטגרבילית כי סכום של שתי אינטגרביליות.
אם ידוע ש- $|f|$ אינטגרבילית אז בפרט:

$$f^+ \leq |f|$$

$$\Rightarrow \int f^+ \leq \int |f|$$

$$f^+ \leq |f|$$

$$\Rightarrow \int f^- \leq \int |f|$$

ולכן גם f^+, f^- אינטגרבילית ולכן f אינטגרבילית.

הסבר לאינטגרל לבג

בשיעורי בית נצטרך להוכיח שאם f אינטגרבילית אז קיימת פונקציית מדרגות סופית (מספר המדרגות סופי) שמקרבת במובן שלכל $\varepsilon > 0$ קיימת φ כזו כך ש-

$$\left|\int f - \int \varphi\right| \leq \varepsilon$$

תרגיל: הוכיחו שעבור פונקציה f אינטגרבילית

$$a_n = \int f(x)\cos(nx)dx$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

למת רימן־לבג a_n מקדם פורייה של f.
נשתמש בהערה הנ"ל, כלומר נמצא פונקצית מדרגות סופית המקרבת את f עד כדי ε:

$$\left|\int (f-\varphi)\right| < \varepsilon$$

עבור כל מדרגה, I קטע סופי.
$\int \chi_{(a,b)} \cos(nx)dx = \int_a^b 1\cos(nx) = \frac{\sin(nx)}{n}|_a^b = \frac{\sin(nb)-\sin(na)}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
נסמן

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{I_k}$$

זוהי פונקצית מדגרות סופית כלשהי.

$$M = \sum_{k=1}^{N} c_k$$

$$\left|\int (f-\varphi+\varphi)\cos(nx)\right| \leq \left|\int (f-\varphi)\cos(nx)\right| + \left|\int (\varphi)\cos(nx)\right| < \varepsilon + \frac{M}{n} \to_{n\to\infty} 0$$

$$\left|\int \varphi\cos(nx)\right| \leq \frac{2}{n}|\sum_{k=1}^{N} c_k|$$

סכום סופי.