פונקציות ממשיות - תרגיל 5

16.11.10

מידות סטילגיס

באותו אופן בו הגדרנו את מידת לבג, ניתן להגדיר מידות אחרות, שמחולקות לשלושה סוגים:

1. מידה בדידה - עבור $\{x_1 \dots x_n\}$ ובכל נקודה משקל מתאים $m_1, \dots, m_k$.
   נגדיר:

$$\mu(A) = \sum_{k \in A} m_k$$

   סכום של מידות δ. מתאימה להסתברות בדידה.

2. מידה "רציפה" - עבור $\varphi \geq 0$ רציפה למקוטעין ((למעשה מספיק אינטגרבילית אבל למען הפשטות נדרוש קצת יותר) נגדיר:

$$\mu_\varphi(A) = \int_A \varphi dt$$

   φ נקראת פונקצית צפיפות.

   אם $\varphi = 1$ המידה הזאת היא מידת לבג.

   אם $\mu_\varphi(\mathbb{R}) = 1$ היא נקראת מידת הסתברות.

3. מידה סינגולרית - נגדיר פונקצית התפלגות $F(t) \geq 0$ מונוטונית עולה ורציפה מימין.

   אם F גזירה אז אפשר להגדיר זאת כמו במקרה 2, אבל אם אין פונקציה φ כך ש- $F = \int \varphi dt$ אז F נקראת סינגולרית.

$$\mu([a,b]) := F(b-0) - F(a+0)$$

   כאשר $F(b-0)$ הוא הגבול משמאל ב- b ו- $F(a+0)$ הוא הגבול מימין ב-a.

דוגמא. פונקצית קנטור שראינו בתרגול הקודם היא מונוטונית עולה ורציפה. ראינו שבכל נקודה במשלים של קבוצת קנטור הנגזרת היא 0. כלומר הפונקציה גזירה כמעט בכל מקום והנגזרת שם היא 0. לכן אי־אפשר לשחזר אותה מפונקצית צפיפות.

הערה. אם עבור $f(x)$ יש תכונה המתקיימת בכל הנקודות מלבד קבוצה במידה 0 נאמר שהתכונה מתקיימת כמעט בכל מקום (כב"מ) או a.e.

עבור מידת קנטור (המידה המוגדרת על ידי F כאשר F פונקצית קנטור) μ_F, נחשב את מידת קנטור של הקבוצה המשלימה לקבוצת קנטור.

$$\mu_F([0,1] \setminus C) = 0$$

ולפי מידת לבג:

$$m([0,1] \setminus C) = 1$$

למה? כי ראינו שניתן לרשום את $[0,1] \setminus C = \bigcup_n (a_n, b_n)$ איחוד זר,

$$\mu_F((a_n, b_n)) = F(b_n) - F(a_n) = 0$$

הפונקציה F קבועה על הקטעים של המשלים של קבוצת קנטור.
נסיק ישר:

$$\mu_F(C) = 1$$

סוגי התכנסויות

עבור סדרת פונקציות $\{f_n\}$ יש כמה סוגי התכנסויות.

1. התכנסות נקודתית (pointwise).
2. התכנסות במידה שווה (uniform).
3. התכנסות כמעט בכל מקום (a.e.). נאמר ש- $\{f_n\}$ מתכנסת כמעט בכל מקום על הקבוצה A אם קיימת קבוצה E כך ש- $\mu(E) = 0$ ו-

   $$f_n(x) \xrightarrow[A \setminus E]{p.w.} f(x)$$

   כלומר יש התכנסות נקודתית חוץ מקבוצה ממידה 0.
4. התכנסות במידה.
   נאמר ש- $f_n \xrightarrow{i.m.} f$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$:

   $$\mu\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} < \varepsilon$$

יש סדר גרירות ביניהן:
התכנסות במ"ש על A
$\Downarrow$
התכנסות נקודתית על A
$\Downarrow$
התכנסות כב"מ על A
$\Downarrow$
$(*)$ התכנסות במידה על A
ובאופן כללי אין גרירה הפוכה, בפרט התכנסות במידה אינה גוררת התכנסות כמעט בכל מקום.
$(*)$

תרגיל. הראו שאם $m(A)=\infty$ אז ייתכן מצב בו התכנסות כמעט בכל מקום לא גוררת התכנסות במידה.

הוכחה. נבנה את הפונקציות $f_n\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ‏($m(\mathbb{R}=\infty$).

$$f_n := \begin{cases} 0, & x\le n \\ 1, & x>n \end{cases}$$

ברור ש- $f_n(x)\xrightarrow{p.w.}0$ (ובפרט כמעט בכל מקום על $\mathbb{R}$).
מצד שני:

$$m\{x:|f_n(x)-|>\varepsilon\}=\infty$$

□

דוגמא מעניינת של פונקציה גזירה

תזכור משיעורי הבית:
f אינטגרבילית רימן $\Leftrightarrow$ קבוצת נקודות האי־רציפות שלה היא ממידה 0.

דוגמא. נגזרת חסומה שאינה אינטגרבילית רימן. וזאת סיבה נוספת שרוצים אינטגרל שאינו אינטגרל רימן. מוקדש לחובבי קבוצה קנטור.
עבור $0<a<1$ ו- $0\le x\le 1$.
נגדיר:

$$\varphi_a(x)=\begin{cases}(x-a)^2\sin\left(\frac{1}{x-a}\right), & x\ne a\\ 0, & x=a\end{cases}$$

פונקציה גזירה.

$$\varphi_a'(x)=\begin{cases}2(x-a)\sin\left(\frac{1}{x-a}\right)-(x-a)^2\cos\left(\frac{1}{x-a}\right), & x\ne a\\ 0, & x=a\end{cases}$$

לא רציפה ב- a.
נשים לב, $|\varphi_a'(x)|<3$.
תהי $E\subseteq[0,1]$ קבוצת קנטור המוכללת. מתכונותיה, היא סגורה ו- $m(E)>0$.
נוכל לרשום את המשלים כך:

$$[0,1]\setminus E=\bigcup_n(a_n,b_n)$$

ונסתכל בקטע (a_n,b_n).
נגדיר:

$$a_n+y_n=\sup\{x\in(a_n,\frac{a_n+b_n}{2}]:\varphi_{a_n}'(x)=0\}$$

בעצם y_n הנקודה האחרונה בחצי הקטע השמאלי בה הנגזרת $\varphi_{a_n}'=0$.
ובאופן דומה נגדיר את b_n-y_n.
נגדיר את $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}\varphi_{a_n}(x), & a_n<x<a_n+y_n\\ \varphi_{a_n}(a_n+y_n), & a_n+y_n\le x\le b_n-y_n\\ -\varphi_{b_n}(x), & b_n-y_n<x<b_n\\ 0, & x\in E\end{cases}$$

f גזירה בכל $[0,1]$ ועבור $x\in E$, $f'(x)=0$.
ומצד שני, $f'(x)$ אינה רציפה בכל הנקודות ב-E ו($\mu(E)>0$) ולכן לפי התזכורת f איננה אינטגרבילית רימן.