פונקציות ממשיות - תרגיל 4

9.11.10

פונקציית קנטור

נראה את פונקצית קנטור הידוע בשמה המלא: המדרגות של השטן.
בקטע $[0,1]$ דיברנו על קבוצת קנטור C. נרצה עכשיו להגדיר פונקציה בעל מספר תכונות:

1. מונוטונית עולה.
2. רציפה.
3. ברוב הנקודות הנגזרת שלה היא 0.

שאלה חדוואית טיפוסית. אבל לא פשוטה.

למעשה זאת פונקציה קבועה על המשלים של קבוצת קנטור, ועם זאת היא מצליחה לעלות באופן רציף.
נגדיר אותה:

הגדרה. עבור $x \in [0,1]$ נסמן ב– $\langle a_n \rangle$ את הפיתוח של x לפי בסיס 3 (הפיתוח הטרנארי).
נגדיר:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{2^n}$$

כאשר

$$N = \min\{n : a_n = 1\}$$

המקום הראשון בפיתוח הטרנארי בו מקבלים את הספרה 1. ייתכן $N = \infty$.
ואילו

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n, & n < N \\ 1, & n = N \end{cases}$$

נראה שהפונקציה מקיימת:

1. מוגדרת היטב - לא תלויה בהצגה של x בפיתוח הטרנארי.
2. רציפה

3. מונוטונית עולה ב־$[0,1]$.
4. קבועה בכל קטע $I \subseteq [0,1] \setminus C$.
5. $f[C] = [0,1]$.

הוכחה.

1. יש מספרים בקטע $[0,1]$ שיש להם שני פיתוחים טרנאריים לדוגמא:

$$(\frac{1}{3})_3 = 0.022222222... = 0.100000000...$$

עד אינסוף.

$$(x)_3 = \underbrace{\ldots}_{\text{רצף כלשהו}} \underbrace{q}_{n_0} \underbrace{\ldots}_{\text{רצף נוסף}}$$

בשביל לראות שזה מוגדר היטב מספיק להסתכל על מספרים מהצורה

$$x = \frac{q}{3^{n_0}}$$

כאשר $q = 1, 2$.

זה נראה כך:

$$(x)_3 = 0 \ldots 0 \underbrace{q}_{n_0} 0 \ldots 0$$

ולזה נקרא הצגה (i). מצד שני:

$$(x)_3 = 0 \ldots 0 \underbrace{(q-1)}_{n_0} 2 \ldots 2$$

ולזה נקרא הצגה (ii).

נעבור מקרה־מקרה.

עבור $q = 2$ בהצגה (i)

$$\langle x_n \rangle = 0 \ldots 0 \underbrace{2}_{n_0} 0 \ldots 0$$

אזי

$$N = \infty$$

ואז

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n_0-1} 0 + \frac{1}{2^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 0 = \frac{1}{2^{n_0}}$$

בהצגה (ii)

$$\langle x_n\rangle = 0\dots 0\underbrace{1}_{n_0}2\dots 2$$

אז

$$N = n_0$$

ואזי

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N-1} 0 + \frac{1}{2^{n_0}} = \frac{1}{2^{n_0}}$$

שוויון.

עבור $q = 1$

(i)עבור ההצגה ה-

$$\langle x_n\rangle = 0\dots 0\underbrace{1}_{n_0}0\dots 0$$

לכן,

$$N = n_0$$

ואז,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N-1} 0 + \frac{1}{2^{n_0}} = \frac{1}{2^{n_0}}$$

(ii)עבור ההצגה ה-

$$\langle x_n\rangle = 0\dots 0\underbrace{0}_{n_0}2\dots 2$$

אזי:

$$N = \infty$$

ואז

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n_0} 0 + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n_0}}$$

שוב שוויון.

2. רציפות

נראה שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x-y| < \delta$ אז $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

יהיו $x, y \in [0,1]$

נסמן x_n, y_n פיתוחים טרינאריים של הם. נבחר n_0 להיות ה- nהראשון בו הפיתוחים שונים.

$$n_0 = \min\{n : x_n \neq y_n\}$$

$$|f(x)-f(y)| = \left|\sum_{n=1}^{N(x)} \frac{b_n(x)}{2^n} - \sum_{n=1}^{N(y)} \frac{b_n(y)}{2^n}\right| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n_0-1}}$$

עבור

$$|x-y| < \frac{1}{3^{M+2}} = \delta$$

בוודאי מתקיים

$$n_0 \geq M$$

מדוע?

לכל X מתקיים:

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$$

נסיק,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{3^n} \leq \frac{1}{3^{n_0+1}}$$

לכן

$$|f(x)-f(y)| \leq \frac{1}{2^{n_0-1}} < \frac{1}{2^M}$$

נרצה

$$\frac{1}{2^M} < \varepsilon$$

לכן נבחר

$$M \geq log_2(\frac{1}{\varepsilon})$$

ואם $\delta = \frac{1}{3^{M+2}}$ אז מקבלים את הדרוש.

3. מונוטוניות אם $x < y$ n_0 כמו מקודם.

$$x_{n_0} < y_{n_0}$$

לכן גם

$$b_{n_0}(x) < b_{n_0}(y)$$

ולכן

$$\sum_{n=1}^{N(x)} \frac{b_n(x)}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{N(y)} \frac{b_n(y)}{2^n}$$

עד n_0–הטורים זהים וב n_0יש ייתרון לטור הימני והשארית כבר לא יכולה לעזור.

4. עבור $x, y \in I \subseteq [0,1] \setminus C$

לשניהם יש 1 בפיתוח הטרינארי וגם $N(x) = N(y)$ כי אחרת הם לא על אותו קטע כי יהיה אפשר לדחוף ביניהם מספר שאין לו 1 בפיתוח הטרינארי ולכן בקבוצת קנטור (קבוצת קנטור היא דלילה).

עד לאותו N יש לשניהם אותו פיתוח טרינארי אחרת היה אפשר למצוא מספר מקבוצת קנטור ביניהם ואז הם לא היו על אותו קטע.

$$f(x) = f(y) = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{b_n}{2^n}$$

כנדרש כלומר קבועה על האינטרוול.

5. אם $y \in [0,1]$ נסמן את הפיתוח הבינארי שלו.

ניקח מספר $x \in C$ כך שהפיתוח הטרינארי שלו

$$\langle x_n \rangle_3 = 2 \langle y_n \rangle$$

ברור ש- $x \in C$ וגם $f(x) = y$

$$f[c] = [0,1]$$

□