פונקציות ממשיות - תרגול 3

2.11.10

נמשיך את התרגיל מהשיעור הקודם.

טענה. צריך להראות שהקבוצה הבאה מדידה לפי לבג: יהי I קטע ותהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C(I)$ סדרה של פונקציות רציפות על I. נגדיר

$$E = \{x \in I : \text{מתכנסת } \{f_n(x)\}\}$$

כלומר קבוצת כל הנקודות בהן סדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית.

ננסח זאת לפי תנאי קושי להתכנסות:

$$x \in E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall n, m > N, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

הוכחה. ננסה להציג את E בצורה של איחודים וחיתוכים בני־מניה של קבוצות שידוע כי הן מדידות (לדוגמא קבוצות פתוחות וסגורות).
זאת דרך טובה וכמעט כללית להוכיח שקבוצה היא מדידה.
נגדיר:

$$E_\varepsilon := \{x : \exists N \forall n, m > N |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\}$$

וכן:

$$E := \bigcap_{\varepsilon > 0} E_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{1/n}$$

השוויון השני נובע מהעובדה שהחיתוך הוא של סדרת קבוצות יורדות. כלומר, אם $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ אזי $E_{\varepsilon_2} \subseteq E_{\varepsilon_1}$.
נגדיר:

$$E_{\varepsilon,N} := \{x : \forall n, m > N |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\}$$

לכן נקבל:

$$E_\varepsilon = \bigcup_{N=1}^{\infty} E_{\varepsilon,N}$$

נגדיר

$$E_{\varepsilon,n,m} := \{x : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\}$$

לכן

$$E_{\varepsilon,N} = \bigcap_{n,m>N} E_{\varepsilon,n,m}$$

ונראה עתה ש- $E_{\varepsilon,n,m}$ הינה קבוצה פתוחה ולכן מדידה.
נסמן $g = f_n - f_m$ היא רציפה (הפרש של רציפות). עבור $x \in E_{\varepsilon,n,m}$ רוצים להראות שהקבוצה פתוחה, כלומר שקיים $\delta > 0$ כך ש- $(x-\delta, x+\delta) \subseteq E$.
נשים לב $|g(x)| < \varepsilon$.
נסמן: $0 < \varepsilon_1 = \varepsilon - |g(x)|$.
מרציפות g קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x-y| < \delta$ אז $|g(x) - g(y)| < \varepsilon_1$.
רוצים להוכיח $\varepsilon > |g(y)|$ לכל $y \in (x-\delta, x+\delta)$ מתקיים:

$$\begin{aligned}|g(y)| &= |g(y) - g(x) + g(x)| \leq \\ &\leq |g(y) - g(x)| + |g(x)| < \varepsilon_1 + |g(x)| = \\ &= \varepsilon - |g(x)| + |g(x)| = \varepsilon\end{aligned}$$

evitanretla תמונה הפוכה של פתוחה פתוחה.
לכן $E_{\varepsilon,n,m}$ פתוחה.
כעת:

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n,m>>N} E_{1/k,n,m}$$

□

הגדרה. נאמר על סדרת פונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ שהיא מתכנסת במידה שווה לפי f בקבוצה E אם

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

$f(x)$ נקראת הפונקציה הגבולית.

בהתכנסות נקודתית אין את הסופרמום (בשפת $\varepsilon - \delta$ ההבדל הוא בסדר הכמתים).

דוגמא. $E = [0,1]$, $f_n(x) = x^n$
נגדיר:

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

פונקציה לא רציפה.
הסדרה אינה מתכנסת במידה שווה בקטע.

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in[0,1]} |x^n - f(x)| = \\ &= \sup_{x\in[0,1)} |x^n - f(x)| = \\ &= \sup_{x\in[0,1)} |x^n - 0| = 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0\end{aligned}$$

הערה. סדרת פונקציות רציפות המתכנסת במידה שווה מתכנסת לפונקציה רציפה (ולפי הדוגמא לא מספיק התכנסות נקודתית).
בכלל התורה של לבג צמחה ממקרים כמו המקרה הזה, כלומר שהיינו רוצים קבוצה של פונקציות שהגבול שלכל סדרה של פונקציות מהקבוצה גם הפונקציה הגבולית תהיה בסדרה.

1 פונקציות מדידות

הגדרה. פונקציה $f : X$ תקרא מדידה אם מתקיים שלכל $a \in \mathbb{R}$

$$F^{-1}[(-\infty, a)] \in F$$

כאשר

$$F^{-1}[(-\infty, a)] = \{x \in X : f(x) < a\}$$

הערה. אפשר לחילופין להגדר אותו דבר עם קטעים אחרים:

$$[-\infty, a], [-\infty, a), (-\infty, a]$$

שאלה: אם נתון ש- $|f|$ מדידה האם גם f מדידה?
תשובה: לא. ראינו בכיתה שישנה קבוצה P שאינה מדידה. נגדיר:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in P \\ -1, & x \in \complement P \end{cases}$$

כמובן $|f| = 1$ היא פונקציה מדידה. נראה ש- f אינה מדידה. עבור $a = 0$

$$P = \{x : f(x) > 0\} = f^{-1}[(0, \infty)]$$

ולכן f אינה מדידה.
הכיוון ההפוך כן נכון.
תרגיל: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה. הראו שהיא פונקציה מדידה לבג. פתרון: לכל $a \in \mathbb{R}$ $f^{-1}[(-\infty, a)]$ קבוצה פתוחה. עבור פונקציה רציפה רציפה התמונה ההפוכה של קבוצה פתוחה הינה קבוצה פתוחה, לכן מדידה לבג.
תרגיל:
$X = [0, 1]$

$$\Sigma = \{\varnothing, [0, 1], \left[0, \frac{1}{2}\right] \left(\frac{1}{2}, 1\right]\}$$

איך נראות הפונקציות המדידות במרחב זה? פתרון: הן כולן מהצורה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} c_1, & x \in [0, 1/2] \\ c_2, & x \in (1/2, 1) \end{cases}$$

נראה שפונקציות מהצורה הזאת הן אכן מדידות. נחלק למקרים:
אם

$$a > \max\{c_1, c_2\}$$

אז

$$\{x : f(x) < a\} = f^{-1}[(-\infty, a)]$$

וכן

$$[0, 1] = f^{-1}[(-\infty, a)]$$

אם

$$a < \min\{c_1, c_2\}$$

אז

$$\varnothing = f^{-1}[(-\infty, a)]$$

אם

$$c_1 < a < c_2$$

אז

$$[0, 1/2) = f^{-1}[(-\infty, a)]$$

אם

$$c_2 < a < c_1$$

אז

$$(1/2, 1] = f^{-1}[(-\infty, a)]$$

כיוון שני תרגיל.