פונקציות ממשיות ־ תרגול 2

26.10.10

קבוצת קנטור – המשך

נמשיך עם קבוצת קנטור.
ראינו בתרגול הקודם:

1. C קבוצה סגורה.
2. $m^*(C)=0$

נראה שתי תכונות נוספות.

3. עוצמת C היא עוצמת הרצף. כדי להראות זאת נתבונן בהגדרה נוספת של קבוצת קנטור. C הינה קבוצת כל המספרים בקטע $[0,1]$ שבפיתוח הטרנארי שלהן לא מופיעה הספרה 1. (נסו להבין מדוע זה קורה. למעשה כל ספרה של הפיתוח הטרנארי אומרת לאיזה שליש המספר שייך).

   לכל $x\in C$ יש פיתוח טרנארי ללא הספרה 1, כלומר מתאימה לו סדרה אינסופית. אם נזהרים (בעיקר מפיתוחים כפולים) אפשר לרשום פונקציה הפיכה בין קבוצת הסדרות מעל $\{0,2\}$ לקבוצת קנטור. נסיק:

$$|C|=|\{0,2\}^{\mathbb{N}}|=\aleph$$

4. C היא קבוצה דלילה – כלומר $(\overset{\circ}{\overline{C}})$. מדוע? כי $C=\overline{C}$ (הרי C קבוצה סגורה). לכן, די להראות שאין ב–C נקודות פנימיות.

   תהיה $x\in C$ אז לכל $\varepsilon>0$ נסתכל על $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$. אבל נוכיח ב–2 (שתי) דרכים ש– $C\not\supseteq(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$.

   לפי האחת, נניח בשלילה כי הקטע אכן ב–C. ניקח שתי נקודות בקטע (כי אינו ריק). בפרט הפיתוח הטרינארי שלהן שונה החל ממקום מסויים (נאמר n). אזי, לראשון במקום ה–n יש 0 ולשני במקום ה– n יש 2. מצד שני, זהו קטע, לכן מכיל את כל הנקודות בין השתיים שבחרנו. בפרט את זאת שבפיתוח הטרנארי שלה יש 1 במקום ה– n. כזאת לא יכולה להיות ב–C סתירה.

   לפי השנייה, לכל קטע יש מידה שונה מ–0. אך קבוצת קנטור מידתה 0, לכן לא ייתכן שמכילה קבוצה ממידה שאינה אפס.

מידה חיצונית

הגדרה. עבור $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ כיסוי פתוח של A.

$$m^*(A)=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}l(I_n):A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\}$$

טענה. אם לקבוצה A יש כיסוי I_n סגור על ידי קטעים אז נוכל למצוא לכל $\varepsilon > 0$ כיסוי פתוח J_n מכסה את A וגם מקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} l(J_n)) - \varepsilon$$

הוכחה. ל - A נתון I_n $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}$, $I_n = [a_n, b_n]$ קטעים פתוחים ויהי $\varepsilon > 0$. לכל n נבחר J_n באופן הבא:

$$J_n = \left(a - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, b + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)$$

מתקיים $l(I_n) = l(J_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}$.
לכן נקבל

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} J_n$$

וכן

$$\sum_{i=1}^{\infty} l(I_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(l(J_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} l(J_n) - \varepsilon$$

□

הערות.

1. חשוב שהכיסוי שלקחנו הוא לכל היותר בן־מניה.
2. לפעמים, במקרים אחרים, חשוב לא לערבב בין קבוצות פתוחות וסגורות. למשל במשפט עם הרבה סעיפים שעשינו בכיתה.

קבוצה מדידה לבג

הגדרה. קבוצה E תקרא מדידה, אם לכל קבוצה A מתקיים:

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \complement E)$$

הערות.

1. כפי שבוודאי שמתם לב, ההגדרה לא בהירה ואינטואיטיבית מי יודע מה...
2. כדי להראות שקבוצה היא מדידה, מספיק להראות

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \complement E)$$

הכיוון השני מקבלים חינם מתת־אדיטיביות.

אלגברה - σ

הגדרה. אוסף קבוצות חלקיות $F \subseteq P(X)$ שמקיים את התכונות הבאות נקרא אלגברה - σ:

1. $X \in F$.
2. אם $A \in F$ אז $\complement A \in F$.
3. אם $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ אזי $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \in F$.

הערה. ראינו שאוסף כל הקבוצות המדידות לבג (המסומן ב- L) הוא אלגברה - σ.

דוגמא. נתבונן בקבוצות $A \subseteq \mathbb{R}$ המקיימת את שני התנאים הבאים:

1. A מדידה לפי לבג.
2. A קבוצה סימטרית. כלומר, אם $x \in A$ אז גם $-x \in A$.

נסתכל על משפחת כל הקבוצות המקיימות זאת, נאמר F. נוכיח כי F היא אלגברה - σ:

1. $\mathbb{R}$ הוא מדיד וסימטרי ולכן $\mathbb{R} \in F$.
2. נניח $A \in F$, אז מההגדרה A סימטרית ומדידה. מתכונות קבוצות מדידות גם $\complement A$ מדידה. נוכיח $\complement A$ סימטרית. יהי $x \in \complement A$. אזי $x \notin A$. מההגדרת קבוצה סימטרית גם $-x \notin A$, לכן $-x \in \complement A$.
3. נניח $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq F$. נתבונן ב- $A := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

   A מדידה לפי לבג כאיחוד של מספר בן־מניה של קבוצות מדידות לפי לבג. נראה כי A סימטרית. יהי $x \in A$. אזי קיים i כך ש- $x \in A_i$. מההנחה $A_i \in F$ בפרט סימטרית. לכן $-x \in A_i$. מכאן גם $-x \in A$.

תרגיל. צריך להראות שהקבוצה הבאה מדידה לפי לבג: יהי I קטע ותהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C(I)$ סדרה של פונקציות רציפות על I. נגדיר

$$E = \{x \in I : \text{מתכנסת } \{f_n(x)\}\}$$

כלומר קבוצת כל הנקודות בהן סדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית.

לא נראה את ההוכחה בתרגול הזה, אבל נראה את הרעיון: ראשית:

$$x \in E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N, \forall m, n > N$$

מתקיים:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

(ד"ש מקושי).
כעת לרעיון ההוכחה: נראה שלמעשה ניתן להציג את E כאיחוד וחיתוך בן־מניה של קבוצות פתוחות.