פונקציות ממשיות - תרגול 14

18.1.11

עוד על L_p

מרחבי L_p למה זה טוב?

רוצים למצוא את המחלקה הרחבה ביותר של פונקציות שהן סגורות תחת סוג כלשהו של התכנסות (שלא יהיו חורים, כמו ממשיים שסותמים חורים בין רציונליים).
לדוגמא, $f_n(x) = x^n$ בקטע $[0,1]$.

$$f_n(x) = x^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

ההתכנסות היא נקודתית. קיבלנו סדרת פונקציות רציפות שמתכנסות נקודתית לפונקציה שאינה רציפה. כלומר, המרחב $C(I)$ אינו סגור תחת התכנסות נקודתית אבל כן ידוע שתחת התכנסות במ"ש הוא כן סגור, כלומר אם מתקיים:

$$\sup_I |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

אבל זה מרחב די מסובך ולא כל כך עשיר.
ניסו אח"כ להגדיר את המרחב

$$B_0 = C(I)$$

$$B_1 = C \cup \{\lim f_n(x) : f_n \in C(I)\}$$

B_1 כנ"ל נקרא מחלקת בייר, אבל הסתבר שזה לא מספיק. גם כאן אין סגירות תחת התכנסות נקודתית.
הדוגמא לכך היא פונקציית דיריכלה, כי לא ניתן לקבל אותה כגבול של פונקציות רציפות אבל כן שייכת לגבול כפול של פונקציות רציפות.

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} = \lim_{k\to\infty} \lim(\cos(k!\pi x)^{2m})$$

ומתברר שאפשר להמשיך עם ה-B_i ועדיין לא לכסות הכל.
אז הסתכלו ב-

$$C_p(I) = \{f \in C(I) : \|f\|_p < \infty\}$$

עם התכנסות בנורמת - p. עם אינטגרל רימן עבור $\|\|_p$ זה עדיין לא מספיק טוב.
ואז הגיעו להתכנסות בנורמת p במרחבי L_p שם זה אינטגרל לבג ושם כן יש סגירות להתכנסות.

תרגילים

תרגיל:
הראו כי עבור $f \in L_p(0,\infty)$ ו- $\alpha > 0$ מתקיים:

$$m(\{x : f(x) \geq \alpha \|f\|_p\}) \leq \frac{1}{\alpha^p}$$

פתרון:
אם $f = 0$ כב"מ אז המקרה מנוון ומתקיים.

$$A_\alpha \subseteq \{x : |f(x)|^p \geq \alpha^p \int_0^\infty |f(x)|^p dx\} =: B_\alpha$$

לפי הנתון:

$$\infty > (\|f\|_p)^p = \int_o^\infty |f(x)|^p dx \geq \int_{B_\alpha} |f(x)|^p dx \geq \alpha^p \cdot (\|f\|_p)^p m(B_\alpha)$$

$$m(B_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha^p}$$

וכמובן, $m(A_\alpha) \leq m(B_\alpha)$.
תרגיל: נתון ש- $f \in L[0,1]$. הוכיחו כי קיים m כך ש-

$$\int_{\{t : f(t) > M\}} f(t) dt < \frac{1}{2011}$$

פתרון:

$$A_m := \{t : f(t) > M\}$$

נגדיר:

$$A_n \subseteq B_n = \{t : |f(t)| > n\}$$

זאת קבוצה מדידה כי f מדידה.
נרצה להשתמש ברציפות של המידה:

$$m(\bigcup_{n=1}^\infty B_n) = \lim_{n\to\infty} m(B_n)$$

חיתוך של קבוצות יורדות והמידה סופית.

$$m(B_n) = m\{t : |f(t)| > n\} \overset{1}{\leq} \frac{\int_0^1 |f(t)| dt}{n} = \frac{c}{n}$$

1. אי-שוויון מרקוב
$f \in L(0,1)$ לכן, $\|f\|_1 = c$. לכן, קיים M כך שעבור $n \geq M$ מתקיים $\frac{c}{n} < \frac{1}{2011}$ קטן כרוצננו. מרציפות האינטגרל סיימנו.

תרגיל: חשבו:

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty \frac{\sin^n x}{x^2}dx$$

פתרון:
נגדיר:

$$f_n=\frac{\sin^n x}{x^2}$$

1. f_n מדידות כי הן רציפות כב"מ.
2. $|f_n(x)|\le\frac{1}{x^2}=g(x)\in L(1,\infty)$.
3. $f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{a.e.}0$. כי שואף לאפס מלבד בן מנייה של נקודות.

לכן,

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n=\int\lim f_n=\int_0^1 0=0$$

תרגיל: תהי f_n סדרת פונקציות רציפות על $\mathbb{R}$ הוכח כי $B=\{x:f_n(x)\to\infty\}$ מדידה.
פתרון:

$$B=\{x:\forall M\exists N\forall n>N|f_n(x)|>M\}=\bigcap_{M=1}^\infty\bigcup_{N=1}^\infty\bigcap_{n=N}^\infty\{x:f_n(x)>M\}$$

וזו קבוצה מדידה כי f_n מדידה (כי היא רציפה).
תרגיל:
תהי $E\subseteq\mathbb{R}^2$ כך ש- $0<m(E)<\infty$. הוכיחו כי קיים $g(x)=c$ כך שהוא מחלק את E לשני חלקים בעלי מידה שווה.
פתרון:
נגדיר $f(t)=m(E\cap[y<y])$. נראה ש-f רציפה ואז כיוון ש-

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=m(E)$$

$$\lim_{t\to-\infty}f(t)=0$$

ואז לפי משפט ערך הביניים.
נוכיח ש- f רציפה.
עבור $|t-t_0|<\delta$ נחשב:

$$|f(t)-f(t_0)|\overset{1}{\le}|f(t_0-\delta)-f(t_0+\delta)|=$$
$$=m(E\cap[t_0-\delta<y<t_0+\delta])\overset{2}{\le}R\cdot M[t_0-\delta<y<t_0+\delta]=R\cdot 2\delta$$

1. כי f מונוטונית עולה.
2. E חסומה בריבוע ברדיוס R.

ולכן עבור $\delta=\frac{\varepsilon}{2R}$ ההפרש קטן מ- ε ולכן רציפה.
הערה. אפשר לוותר על כך ש- E חסומה.