פונקציות ממשיות - תרגול 13

11.1.11

משפט החלפת סדר האינטגרציה

דוגמא. לכך שחייבים את אחד התנאים הבאים: או ש- f חיובית (משפט טונלי) או f אינטגרבילית (משפט פוביני).
נסתכל $X = Y = \mathbb{N}^+$ ו- μ, ν מידות ספירה (מספר נקודות).
נסתכל:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 - 2^{-x}, & x = y \\ -2 + 2^{-x}, & x = y+1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

הפונקציה אינה אינטגרבילית ואינה חיובית.
נחשב:

$$\int_X \int_Y f(x,y)dydx = \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=1}^{\infty} f(x,y) = \sum_{x=1}^{\infty} (f(x,1) + f(x,2) + \ldots) =$$

$$= \underbrace{f(1,1)}_{x=1} + \underbrace{\overbrace{f(2,1) + f(2,2)}^{-2+2^{-2}+2-2^{-2}=0}}_{x=2} + \ldots = f(1,1) = \frac{3}{2}$$

$$\int_Y \int_X f(x,y)dxdy = \sum_{y=1}^{\infty} \sum_{x=1}^{\infty} f(x,y) = \sum_{y=1}^{\infty} (f(1,y) + f(2,y) + \ldots) =$$

$$= \underbrace{f(1,1) + f(2,1)}_{y=1} + \underbrace{f(2,2) + f(3,2)}_{y=2} + \ldots =$$

$$= \sum_{y=1}^{\infty} ((2 - 2^{-y}) - 2 + 2^{-y-1}) = \sum_{y=1}^{\infty} 2^{-y-1} - 2^{-y} =$$

$$= -\sum_{y=1}^{\infty} 2^{-y-1} = -\frac{1}{2}$$

וכמובן שאין שוויון.

מרחבי $L_p(I)$

עבור $1 \geq p < \infty$. הגדרנו בשעיור נורמה:

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_I |f|^p}$$

והמרחב $L_p(I)$ הוא מחלקות שקילות של f הזהות כב"מ ומקיימות שהן מדידות וש-$\|f\|_p < \infty$. וזה כדי שתתקיים הדרישה $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$.
וראינו בכיתה את אי־שוויון מינקובסקי:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

וזה למעשה אי־שוויון המשולש. מרחבי L_p הם מרחבים לינאריים נורמיים.
למעשה מרחבי L_p הם ניסיון להרחיב את התורה של אלגברה לינרית לוקטורים אינסופיים.

אי-שוויון הולדר

עבור $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$|\langle f, g\rangle| := |\int fg| \leq \int |fg| \leq \|f\|_p + \|g\|_q$$

כאשר $q = p = 2$ המכפלה הפנימית הנ"ל מוגדרת היטב ולמעשה זה אי־שוויון קושי-שוורץ.
במקרה הזה המרחבים L_2 נקראים מרחבי הילברט.
תרגיל:
עבור f מדידה וחסומה נגדיר:

$$\|f\|_\infty = esssup|f(t)| = \inf\{M|m(\{t||f(t)| > M\} = 0)\}$$

וזה למעשה הסופרמום מלבד אולע קבוצה ממידה אפס.
הראו שעבור $I = [0, 1]$

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$

פתרון:

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_I |f|^p} \overset{1}{\leq} \sqrt[p]{\int_I \|f\|_\infty^p} = \|f\|_\infty \int_I 1 = \|f\|_\infty$$

1. $|f| \leq \|f\|_\infty$ מלבד אולי קבוצה ממידה אפס.
לכן,

$$\limsup \|f|\_p \leq \|f\|_\infty$$

בכיוון השני, לכל $\varepsilon > 0$ נגדיר:

$$E = \{x \Big| |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\} \subseteq I$$

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_I |f|^p} \geq \sqrt[p]{\int_E |f|^p} \geq \sqrt[p]{\int_E (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p} =$$
$$= (\|f\|_\infty - \varepsilon) \sqrt[p]{m(E)} \xrightarrow{p \to \infty} \|f\|_\infty - \varepsilon$$

$m(E) \neq 0$ כי אחרת אם $m(E) = 0$ נקבל כי $\|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty - \varepsilon$, וזו סתירה.
לכן,

$$\liminf \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$$

תרגיל: עבור אילו ערכי $p > 0$ הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ שייכת ל- $L^p[0,1]$? $L^p[1,\infty]$? $L^p[0,\infty]$?
פתרון:
נחלק לתחומים:
בתחום $I = [0,1]$:

$$(\|f\|_p)^p = \int_0^1 \frac{1}{|x|^p} dx = \begin{cases} \text{סופי} & p < 1 \\ \infty & p \geq 1 \end{cases}$$

$$p < 1 : \frac{1}{x} \in L^p([0,1])$$

לא דיברנו על $p < 1$, שם הנורמה שהגדרנו לא באמת נורמה כי אי־שוויון מינקובסקי בכלל מתהפך. זה לא במיינסטרים אבל נשמע גם מעניין.
עבור $I = [1,\infty)$

$$\int_1^\infty \frac{1}{|x|^p} dx = \begin{cases} \text{סופי} & p > 1 \\ \infty & p \leq 1 \end{cases}$$

$$p > 1 : \frac{1}{x} \in L^p([1,\infty))$$

אין אף p המשותף לשניהם לכן

$$\forall p > 0 \frac{1}{x} \notin L^p(0,\infty)$$

קרנף:
הראו ש-

$$L^{p_2}[0,1] \subsetneq L^{p_1}[0,1]$$

כאשר $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$
פתרון:
ניקח $f \in L^{p_1}[0,1]$ אז מתקיים $\|f\|_{p_2} < \infty$, כלומר

$$\int_0^1 \|f\|^{p_2} < \infty$$

ונגדיר הקבוצה הבאה:

$$E = \{x \Big| |f(x) \leq 1\} \subseteq [0,1]$$

$$\int_{\complement E} |f(x)|^{p_1} \overset{1}{<} \int_{\complement E} |f(x)|^{p_2} \leq (\|f\|_{p_2})^{p_2} < \infty$$

1. $|f(x)| \geq 1, 1 \leq p_1 < p_2$

וגם,

$$\int_E |f(x)|^{p_1} dx \overset{2}{<} \int_E 1 = m(E) \leq 1$$

2. $|f| < 1$

לכן, סה"כ:

$$\|f\|_{p_1}^{p_1} = \int_{I = E \cup \complement E} |f|^{p_1} dx < \infty$$

ולכן,

$$f \in L^{p_1}[0,1]$$

.

ואין שוויון לדוגמא

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[p_2]{x}}$$

$$f(x) \notin L^{p_2}$$

$$f(x) \in L^{p_1}$$