פונקציות ממשיות - תרגול 12

4.1.11

"משפטי החלפת סדר אינטגרציה".
בהיתנן $(X,\mu),(Y,\nu)$ מרחבי מידה, ו- μ,ν מידות שלמות ו- $f:X\times Y\to\mathbb{R}$ מדידה.
אזי היינו רוצים ש:
dsbh

$$\int_X(\int_Y f(x,y)d\nu(y))d\mu=\int_{X\times Y}f(x,y)d\mu\times d\nu=\int_Y(\int_X f(x,y)d\mu(x))d\nu$$

בפועל:

משפט פוביני

אם f אינטגרבילית (ביחס למידת המכפלה) אז זה נכון.

משפט טונלי

$f\geq 0$ אי שלילית, μ,ν σ–סופיות.
ברור שמידת לבג שלמה וσ–סופית אז מותר להשתמש בשניהם.
תרגיל:
נגדיר $A_n=\{(x_1,\ldots,x_n)|\sum_{i=1}^n|x_i|<1\}$.
נגדיר I_n להיות המידה של A_n.
חשבו את I_n.
פתרון: נרצה לעשות:

$$I_n=\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{A_n}d^nm$$

כאשר m^n מידת לבג ה–n ממדית, כלומר מכפלה של מידת לבג n פעמים.
נשים לב לתכונה:

$$\chi_{a,x_2,\ldots,x_n}=\chi_{A_{n-1}}(\frac{x_2}{1-|a|},\ldots,\frac{x_n}{1-|a|})$$

כי מתקיים:

$$\sum_{i=2}^n|x_i|<1-|a|$$

אם נחלק: $\frac{1}{1-|a|}\sum_{i=2}^n|x_i|<1$

$$I_n =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A_n} \overset{1}{=} \int_{\mathbb{R}} \chi_{A_1}(a) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_{A_{n_1}}(\frac{x_2}{1-|a|}, \dots, \frac{x_n}{1-|a|}) d^{n-1}m \overset{2}{=}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \chi_{A_1}(a) (\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_{(1-|a|A_{n-1}}(x_2, \dots, x_n)) \overset{3}{=}$$

$$= \int_{-1}^{1} (1-|a|)^{n-1} \cdot I_{n-1} da = 2 \cdot \frac{1-|a|)^n}{n} \Big|_{-1}^{1} I_{n-1} =$$

$$= \frac{2}{n} I_{n-1} = \frac{2}{n} \cdot \frac{2}{n-1} I_{n-2} = \dots = \frac{2^n}{n!}$$

1. פוביני
2. $\chi_{A_1}(\frac{x_1}{a}) = \chi_{a \cdot A_1}(x_1)$ מדוע?

$$\chi_{A_1}(\frac{x_1}{a}) = \begin{cases} 1, & \frac{x_1}{a} \in A_1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases} = \begin{cases} 1, & x_1 \in a \cdot A_1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

.3

$$m(\chi_{aA}) = a \cdot m(\chi_A)$$

ולכן,

$$\int \mathbb{1}_{aA} d^n m = a^n \int \mathbb{1}_A d^n m$$

תרגיל: נסתכל ב–

$$\Pi = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$$

ותהי $\mu = \frac{m}{2\pi}$ מידת לבג המנורמלת על Π.
נניח נתונות $f : \Pi \to \mathbb{R}$ ו–A מדידות, כך שמתקיים $\int_\Pi f d\mu = \alpha$, וגם ש– $\mu(A) = b$.
הראו כי קיים סיבוב של הקבוצה A ונסמנו $\tilde{A}$ כך ש– $h(\theta_0) = \int_{\sim A} f \geq b \cdot \alpha$ עבור θ כלשהו.

הערה. סיבוב ב–θ הוא:

$$\sim A = e^{i\theta} A$$

פתרון: נגדיר לכל $\theta \in [0, 2\pi)$ את

$$h(\theta) := \int_\Pi f(e^{i\theta}) \cdot \chi_A(e^{i(t+\theta)}) d\mu(t)$$

זה לסובב את A ב– θ ולעשות אינטגרל של f על הקבוצה המסובבת.
נחשב:

$$\int_{\Pi} h(\theta) d\mu(\theta) =$$

$$= \int_{\Pi} (\int_{\Pi} f(e^{it}) \chi_A (e^{i(t+\theta)}) dt d\theta \stackrel{1}{=}$$

$$= \int_{\Pi} (\int_{\Pi} f(e^{it}) \chi_A (e^{i(t+\theta)}) d\theta) dt =$$

$$= \int_{\Pi} f(e^{i(t+\theta)}) (\int_{\Pi} \chi_A (e^{i(t+\theta)}) d\theta) dt = \int_{\Pi} f(e^{it}) \underbrace{\mu(A) dt}_{=b} = b \underbrace{\int_{\Pi} f(e^{it}) dt}_{=\alpha} = b \cdot \alpha$$

הכוונה היא כמובן לא על Π אלה למספרים ב– $[0, 2\pi)$. 1. פוביני: f אינטגרבילית, χ_A אינטגרבילית וחסומה לכן מכפלתן אינטגרבילית. 2. μ אינוואריאנטית להזזות
ולכן קיים $\theta \in [0, \pi)$ כך ש– $h(\theta) \geq b\dot{\alpha}$
כי אחרת היינו מקבלים $(h(\theta) < b \cdot a)$

$$\int_{\Pi} h(\theta) d\theta < b \cdot \alpha \cdot \int_{\Pi} 1 d\theta = b \cdot \alpha$$

בסתירה למה שחישבנו.