פונקציות ממשיות - תרגול 11

28.12.10

$$\int \varphi dF = \int_0 (\varphi) = \varphi(0)$$

הראנו עבור

$$\varphi = \mathbb{1}_A$$

מכאן מראים לפונקציות פשוטות ואז למדידות.
אם F רציפה בהחלט

$$\int \varphi dF = \int \varphi F' dm$$

אינטגרל לבג.
וזה קשור להכללה של מידה שנקראת התפלגות.
תרגיל:

$$F = IMAGE$$

$$\int \varphi dF = ?$$

$$\mu_F(A) = \begin{cases} 1, & 1 \in A \\ 0, & 1 \notin A \end{cases} + m(A \cap [0,1]) = \int_1 + m(A \cap [0,1])$$

$$\int \varphi(x) dF(x) = \varphi(1) + \int_0^1 \varphi(x) dx$$

תרגיל: אם F פונקציית קנטור חשבו את

$$\int_0^1 x dF$$

רעיון לפתרון:
קבוצת קנטור סימטרית סביב חצי. עבור A מדידה נגדיר את

$$A' = \{1 - x | x \in A\}$$

$$\mu_F(A) = \mu_F(A')$$

לכן,

$$\int_0^1 \mathbb{1}_A(x)dF = \int_0^1 \mathbb{1}_{A'}(x)dF = \int_0^1 \mathbb{1}_A(1-x)dF$$

ומכאן אפשר להראות נכונות גם לפונקציות פשוטות ולפונקציות מדידות ולכן לכל f מדידה:

$$\int_0^1 f(x)dF = \int_0^1 f(1-x)dF$$

לכן,

$$I = \int_0^1 xdF = \int_0^1 (1-x)dF = \int_0^1 1dF - \int_0^1 xdF$$

$$2I = 1$$

$$I = \frac{1}{2}$$

מידות מכפלה

)המידות הן σ–סופיות ושלמות).
σ – סופיות מבטיחות הרבה יחידה.
בהינתן שתי מידות μ, ν על X, Y בהתאמה אז מידת המכפלה $\nu \times \mu$ על $X \times Y$ היא המידה היחידה על $X \times Y$ שנותנת לכל $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{A}.\mathcal{B}$ הן אלגבראות–σ ב–Y ו–X בהתאמה(

$$\nu \times \mu(A \times B) = \nu(A) \cdot \mu(B)$$

הערה. שלמות רצינו כדי שאפילו אם $P \subseteq Y$ אינה מדידה עדיין $P \times \{x\}$ תהיה בעלת מידה אפס.

תרגיל:

$$X = Y = [0, 1]$$

וניקח $m = \mu = \nu$ מידת לבג.
הראו שכל קבוצה פתוחה ב– $X \times Y$ הינה מדידה והסיקו שקבוצות בורל הינן מדידות.
פתרון: כל קבוצה פתוחה ב– $X \times Y$ אפשר להציג בתור איחוד בן מניה של מלבנים פתוחים.
כי ידוע מטופולוגיה שזה נכון (כי המרחב מקיים את אקסיומת המניה השנייה).
קבוצה פתוחה O:

$$O = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$$

R_n מלבנים. כל מלבן הוא קבוצה מדידה ולכן כאיחוד בן מניה של מדידות O מדידה.
האלגברה־σ של בורל הינה אלגברה־ σ המינימלית המכילה את כל הקבוצות הפתוחות ולכן כל קבוצת בורל היא מדידה. כל קבוצת בורל היא איחודים וחיתוכים בני מניה של קבוצות פתוחות.
תרגיל: תהי $A \subseteq \mathbb{R}^2$ (ועם מידת לבג m^2 על $\mathbb{R}^2$). נגדיר:

$$A_\varepsilon = \{(x, y) \in A | |x| > \varepsilon |y|\}$$

הראו כי אם לכל $\varepsilon > 0$ A_ε מדידה אזי גם A מדידה.
פתרון: תגכורת: תכונת ארכימדס: לכל $x, y > 0$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כל ש־ $nx > y$.
עבור $x \neq 0$ קיים $n \in N$ כך ש $n|x| > |y|$ כלומר עבור n זה $(x, y) \in A_{1/n}$ לכן, $A \setminus \{0\} \times \mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n}$
איחוד בן מניה של קבוצות מדידות ולכן מדיד. וגם $A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n} \subseteq \{0\} \times \mathbb{R}$
וידוע כי

$$m^2(\{0\} \times \mathbb{R}) = 0$$

ולכן,

$$m^2(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n}) = 0$$

ולכן A מדידה.
תרגיל: הראו שעקום גזיר ברציפות (ב־C^1) ב־ $\mathbb{R}^2$ הינו בעל מידת לבג 0.
פתרון:
עקום גזיר ברציפות:

$$\Gamma = \{(x(t), y(t)) | t \in I = [0, 1]\}$$

$x(t), y(t)$ גזירות ברציפות.
לפי ההנחה $x'(t), y'(t)$ רציפות ולכן חסומות. ולכן קיים M כך ש־ $M > |x'(t)|, |y'(t)|$ לכל t.
כלומר לכל s, t

$$|x(t) - x(s)| < M|t - s|$$

$$|y(t) - y(s)| < M|t - s|$$

נחלק את $[0, 1]$ ל־ n חלקים שווים. נגדיר $t_i = \frac{i}{n}$ $1 \leq i \leq n$
נסתכל במלבנים

$$R_i = [x(t_i) - \varepsilon M, x(t_i) + \varepsilon M] \times [y(t_i) - \varepsilon M, y(t_i) + \varepsilon M]$$

ריבוע עם צלע $2\varepsilon M$
אם $t - t_i < \varepsilon = \frac{1}{n}$ אז עדיין $(x(t), y(t)) \in R_i$ כי לפי תנאי ליפשיץ

$|y(t)-y(t_i)|<M\varepsilon$ $|x(t)-x(t_i)|<M\varepsilon$
לכן נקבל

$$\Gamma \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R-i$$

נחשב את המידה של הריבועים

$$\sum (2\varepsilon M)^2 = n \cdot 4M^2\varepsilon^2 = \frac{4M^2}{n} \underset{n\to\infty}{\longleftarrow} 0$$