# פונקציות ממשיות - תרגול 10

21.12.10

## השלמות בנשא התכנסות בהחלט

דוגמא לכך שמשפט לגרנז' צריך גזיקות בקטע
$I = [-1, 1]$

$$f(x) = |x| \in AC$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ -1, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

אבל

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{|x| - |y|}{x - y} \neq \pm 1$$

תרגיל: אם

$$f, g \in AC$$

בקטע $[a, b]$
אז מתקיים:

$$\int_a^b f'g dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b fg' dx$$

אינטגרציה בחלקים.
פתרון: מתרגיל בית אם $f, g \in AC$ אזי גם $fg \in AC$.
נסתכל ב-

$$\int_a^b fg' + f'g dx = \int_a^b (f \cdot g)' = f(x)g(x)\Big|_a^b$$

תרגיל: אפיינו את הפונקציות $f : I \to \mathbb{R}$ המקיימות התנאי הבא:
לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $\{x_i, x_i'\}$ משפחת קטעים, לא בהכרח זרים, מתקיים:

$$\sum |x_i - x_i'| < \delta$$

אזי

$$\sum |f(x_i) - f(x_i')| < \varepsilon$$

ההבדל לרציפות בהחלט הוא שהדרישה היא לא רק ללקטעים זרים.
פתרון:
נראה שאלה בדיוק פונקציות ליפשיץ.
אם $f$ ליפשיץ אזי לכל $x,y$ מתקיים כי $|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$. יהי $\varepsilon > 0$ ו- $\{(x_i,x_i')\}$ קטעים המקיימים

$$\sum |x_i - x_i'| < \delta$$

ניקח $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$

$$\sum |f(x_i) - f(x_i')| \leq \sum M|x_i - x_i'| \leq M\delta < \varepsilon$$

כיוון שני.
נניח שמתקיים $(*)$. אז בפרט עבור $\varepsilon = 1$ ואם ניקח אוסף הקטעים שהוא $n$ פעמים הקטע $(x, x+\frac{\delta}{n})$ ואז $\sum_{i=1}^{n} |x - x + \frac{\delta}{n}| = n\frac{\delta}{n} = \delta$
ולכן

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x+\frac{\delta}{n}) - f(x)| = n|f(x+\frac{\delta}{n} - f(x)| < 1$$

$$\frac{f(x+\frac{\delta}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} < \frac{1}{\delta}$$

נשאיף ל - $\infty$
$|f'x| < \frac{1}{\delta}$ כב"מ.
קיבלנו שהנגזרת של $x$ חסומה כב"מ. ואם מתקיים (*) אז בוודאי $f \in AC$ ולכן לפי התרגיל מהתחלת התרגול $f$ ליפשיץ.

## אינטגרל סטילג'ס

רעיון:
נתבונן במרחב מידה $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$
$\mathcal{B}$ קבוצות בורל. $\mu$ מידה שחסומה על קבוצות חסומות.
למידה כזאת נקרא מידה בייר.
נגדיר

$$F(x) = \mu(-\infty, x]$$

היא נקראת פונקצית התפלגות מצטברת. היא פונקציה מונוטונית עולה.

$$\mu(a,b] = F(b) - F(a)$$

וגם, מתכונת הרציפות של המידה.

$$F(b) = \mu(-\infty, b] = \lim_{n\to\infty} \mu(-\infty, b+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} F(b+\frac{1}{n}) = F(b^+)$$

כלומר $F(x)$ פונקציה רציפה מימין. מתי $F$ רציפה בנקודה $b$?
כאשר $\mu(\{b\})=0$
כלומר אין ל- $\mu$ אטום ב- $b$.

$$\mu(\{b\})=\lim_{n\to\infty}\mu(b-\frac{1}{n},b]=\lim_{n\to\infty}(F(b)-F(b-\frac{1}{n})=F(b)-F(b^-)$$

לסיכום: עבור $\mu$ מידת בייר מתאימה $F$ המקיימת:
1. $F$ מונוטונית עולה. 2. $F$ רציפה מימין. 3. $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$

**טענה.** לכל $F$ המקיימת שלושת התכונות הנ"ל קיימת מידה בייר $\mu_F$ יחידה המתאימה לה.

הסבר:
נניח ונתונה $F$ כזאת. נגזיר את $\mu$ כך:

$$\mu((a,b]):=F(b)-F(a)$$

הגדרנו אותה על כל הקטעים הללו ואז אפשר לקבל אותה מוגדרת על אלגברה שמיוצרת ע"י הקטעים האלה ואז עושים את תהליך ההרחבה:
1. מגדירים באמצעותה מידה חיצונית $\mu^*$
2. מצמצמים את $\mu^*$ לסיגמהאלגרבה הנוצרת ע"י האלגברה. ושם מראים שהצמצום הזה הוא אכן מידה סיגמה אדיטיבית $\bar{\mu}$
3. אם $\mu$ $\sigma$–סופית אז המידה $\bar{\mu}$ יחידה.

$$\mathbb{R}=\bigcup_n(-n,n+1]$$

$$\mu_F(-n,n+1]<\infty$$

לכן $\mu_F$ $\sigma$–סופית.
אינטגרל סטילג'ס: עבור $\varphi$ מדידת בורל

$$\int\varphi dF:=\int\varphi d\mu_F$$

כאשר $\mu_F$ מידת בייר המתאימה ל- $F$

הערות. 1.אם נתונה רק $F$ עולה ולא בהכרח רציפה מימין אפשר למצוא $F^*$ יחידה שהיא כן רציפה מימין ומזדהה עם $F$.
2. באופן כללי אפשר להכליל את ההגדרה לפונקציות בעלות השתנות חסומה.
3. אם $f\in AC$ אז $\int\varphi dF=\int\varphi\cdot F'dx$

תרגיל:
$F(x)=IMAGE$
למה שווה $\in\varphi dF$
קודם נסתכל על $\varphi=\chi_A$
$\int\chi_A dF=\mu_F(A)=\begin{cases}1, & 0\in A\\ 0, & 0\notin A\end{cases}$

$$\int\lambda\chi_A dF$$

ואז אפשר להכליל לפונקציות מדידות.

$\mu_F = \delta_0$

מידת דלתא מחזירה עבור הפונקציה את הערך ב-0.

$$\int \varphi dF = \int \varphi \mu_F = \varphi(0)$$