פונקציות ממשיות - תרגול 1

19.10.10

הגדרות

הגדרה. נאמר ש- $x \in A$ נקודה פנימית של A אם קיים $\varepsilon > 0$ כך ש-

$$x \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A$$

הגדרה. נאמר כי קבוצה היא פתוחה אם כל נקודה שלה היא נקודה פנימית.

הגדרה. הפנים של A, מסומן $\overset{\circ}{A}$ מוגדר להיות:

$$\overset{\circ}{A} = \{x \in A : \text{נקודה פנימית } x\}$$

נשים לב כי קבוצה A פתוחה $\Leftrightarrow$ $A = \overset{\circ}{A}$.

תכונות של קבוצות פתוחות

1. $\mathbb{R}, \varnothing$ קבוצות פתוחות.
2. איחוד כלשהו של קבוצות פתוחות הינו פתוח. בכתיב פורמלי, אם $\{U_\alpha\}$ הן קבוצות פתוחות, אזי $U = \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$ גם פתוחה.
3. חיתוך סופי של קבוצות פתוחות הוא פתוח. בכתיב פורמלי, אם $\{U_i\}$ הן קבוצות פתוחות, אזי $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ גם פתוחה.

הגדרות נוספות

הגדרה. A תקרא קבוצה סגורה אם $\complement A$ קבוצה פתוחה.

באופן שקול: אם לכל $\{x_n\} \in A$ סדרת נקודות כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ מתקיים $x \in A$.
נקודה x כזאת נקראת נקודת סגור של A.

הגדרה. הקבוצה הבאה נקראת הסגור של A: $\bar{A} = \{x \in \mathbb{R} : \text{x נקודת סגור של A}\}$

מכאן נסיק: A קבוצה סגורה $\Leftrightarrow$ $A = \bar{A}$.

מההגדרה, כללי דה־מורגן והתכונות של קבוצות פתוחות, נקבל את שתי התכונות הבאות של קבוצות סגורות:

1. חיתוך כלשהו של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה. כלומר, אם $\{U_\alpha\}$ קבוצות סגורות, אזי גם $\bigcap\limits_\alpha U_\alpha$ היא קבוצה סגורה.
2. איחוד סופי של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה. כלומר, אם $\{U_i\}$ קבוצות סגורות, אזי גם $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$ היא קבוצה סגורה.

הגדרה. $A \subseteq X$ תקרא קבוצה צפופה ב־ X אם $\bar{A} = X$

באופן שקול: לכל $x \in X$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש־ $|x - a| < \varepsilon$

הגדרה. $A \subseteq \mathbb{R}$ תקרא קבוצה דלילה, אם $\mathring{(\bar{A})} = \varnothing$

באופן שקול: לא קיים תת־קטע של $\mathbb{R}$ כך ש־ A צפופה בה.

קבוצות G_δ ו־ F_σ

הגדרה. קבוצה G תקרא קבוצת G_δ אם ניתן לרשום אותה כחיתוך בן־מניה של קבוצות פתוחות. כלומר, קיימת U_n קבוצות פתוחות כך ש־ $G = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$

הגדרה. קבוצה F תקרא קבוצת F_σ אם המשלים שלה $\complement F$ אינו קבוצה G_δ.

מכללי דה־מורגן ההגדרה שקולה לכך ש־ F ניתן להציג כאיחוד בן מניה של קבוצות סגורות. כלומר, קיימת U_n קבוצות סגורות כך ש־ $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$

דוגמא. האי רציונליים $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ הם קבוצה G_δ.
קל לראות: $\mathbb{I} = \bigcap\limits_{q \in \mathbb{Q}} \complement\{q\}$

טענה. כל קטע חסום הוא קבוצה G_δ

הוכחה.

1. (a, b) קבוצה פתוחה לכן G_δ באופן טריוויאלי.
2. $[a, b)$ נרשום $[a, b) = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b)$
3. $(a, b]$ נרשום $(a, b] = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} (a, b + \frac{1}{n})$
4. $[a, b]$ נרשום $[a, b] = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$

$\square$

מידה חיצונית

לכל $A \subseteq \mathbb{R}$ נגדיר:

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} l(I_n) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} l(I_n)\right\}$$

נשים לב, שבניגוד לשיעור לא דרשנו כיסוי פתוח, אלא כיסוי כלשהו. שתי ההגדרות שקולות לגמרי, אבל נוח יותר לא להגביל עצמנו רק לכיסויים פתוחים. מדוע ההגדרות שקולות? במקום קטע סגור כלשהו $[a,b]$ נקח כיסוי פתוח בן־מניה של הקטע, לדוגמא

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n})$$

עדיין נקבל כיסוי בן־מניה, שכן איחוד בן־מניה של קבוצות בנות־מניה עדיין בן־מניה.

הערה. אם $m^*(A) = 0$ נאמר שהקבוצה A היא קבוצה ממידה אפס.

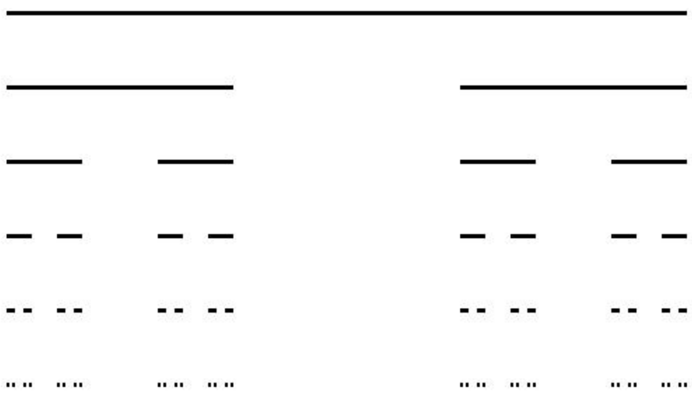
תזכורת. ראינו בכיתה כי עבור כל קבוצה בת־מניה A מתקיים $m^*(A) = 0$.

למעשה מושג המידה בא באיזשהו אופן לעדן את מושג העוצמה. אמנם, המושג עוצמה עוזר להפריד בין קבוצות סופיות לאינסופיות, אך למשל ריבוע וקטע במישור הם מאותה העוצמה, אבל אינטואיטיבית היינו רוצים להגיד שלריבוע יש "נפח" ולקטע לא. באופן דומה לגבי קבוצות על הישר הממשי.

קבוצת קנטור

דוגמא לקבוצה מעוצמת הרצף שהיא ממידה אפס.
נתחיל בקטע $C_1 = [0,1]$.
נבצע את התהליך הבא: נוציא מ־ C_1 את הקטע הפתוח שהינו השליש האמצעי, כלומר את $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. קיבלנו 2 קטעים, כל אחד באורך $\frac{1}{3}$.
כעת נעבוד עם הקבוצה הבאה: $C_2 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. בשלב הבא לכל קטע נוציא את השליש האמצי הפתוח. קיבלנו 2^2 קטעים כל אחד באורך $\frac{1}{3^2}$.
באופן כללי, בשלב ה־ n יש 2^n קטעים כל אחד באורך $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. קבוצת קנטור תהיה

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$



תכונות בסיסיות

1. C קבוצה סגורה. כל אחד מה- C_n הוא קבוצה סגורה (כאיחוד סופי של קטעים סגורים), ולכן C סגורה כחיתוך של סגורות.
2. נחשב את $m^*(C)$:

$$m^*(C) = \inf\left\{\sum l(I_n) : C \subseteq \bigcup I_n\right\}$$

נשים לב, שאם $C_n = \bigcup\limits_{k=1}^{2^n} I_k$ כאשר I_k הם הקטעים הסגורים שמרכיבים את C_n, אזי

$$\sum_{k=1}^{2^n} l(I_k) = 2^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

כעת, לכל $\varepsilon > 0$ ניקח n כך ש- $\left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon$. מהגדרת קבוצת קנטור $C \subseteq C_n$ בפרט מצאנו כיסוי $\{I_k\}$ של C שמקיים $\sum\limits_{k=1}^{2^n} l(I_k) < \varepsilon$. לכן $m^*(C) < \varepsilon$ לכל $\varepsilon > 0$, ולכן בהכרח $m^*(C) = 0$.

בתרגול הבא נראה כי קבוצת קנטור היא אכן מעוצת הרצף.