פונקציות ממשיות - הרצאה 9

14.11.10

בשיעור שעבר דיברנו הרבה על אינטגרלים של פונקציות פשוטות. לבסוף הגענו לתוצאה הבאה:

תוצאה. יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה, $\varphi=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}$ פונקציה מדידה עבור $\{E_i\}$ סדרה של קבוצות מדידות, אזי

$$\int\limits_x \varphi d\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(E_i)$$

נרצה להרחיב לפונקציות מעניינות יותר. נתחיל ממשפט:

משפט. תהי $f:X\to\mathbb{R}$ פונקציה מדידה, חסומה, המתאפסת מחוץ לקבוצה בעלת מידה סופית. נסמן:

$$A:=\sup_{\psi}\left\{\int\limits_x \psi d\mu : \text{פשוטה, מדידה, מתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה סופית } \psi;\quad \psi\le f\right\}$$

$$B:=\inf_{\varphi}\left\{\int\limits_x \psi d\mu : \text{פשוטה, מדידה, מתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה סופית } \varphi;\quad \varphi\ge f\right\}$$

מתקיים:

$$A=B$$

הוכחה. תהיינה φ,ψ כך שתקיים:

$$\psi\le f\le\varphi$$

מתכונות האינטגרל של פונקציות פשוטות

$$\int\limits_x \psi d\mu \le \int\limits_x \varphi d\mu$$

לכן $A\le B$.
נוכיח שהמרחק בין A ל- B קטן כרצוננו.

נניח כי עבור $M>0$ מתקיים $\forall x\in X.|f(x)|<M$ (כי f חסומה), ונניח כי f מתאפסת מחוץ לקבוצה E, כך ש- $\mu(E)<\infty$.
יהי $n\in\mathbb{N}$. לכל $-n\le k\le n$ נגדיר:

$$E_k := \left\{ x\in E : \frac{k-1}{n}M < f(x) < \frac{k}{n}M \right\}$$

$$E := \bigcup_{i=-n}^{n} E_i$$

$\{E_k\}$ כפי שהגדרנו אותן הן זרות שתיים־שתיים ומדידות. נגדיר כעת:

$$\psi_n := \sum_{k=-n}^{n} \frac{k-1}{n} M \chi_{E_k}$$

$$\varphi_n := \sum_{k=-n}^{n} \frac{k}{n} M \chi_{E_k}$$

מההגדרה

$$\psi_n < f < \varphi_n$$

וכן ψ_n,φ_n מתאפסות מחוץ ל-E.
נכתוב:

$$\int \psi_n d\mu \le A \le B \le \int \varphi_n d\mu$$

$$0 \le B-A \le \int \varphi_n d\mu - \int \psi_n d\mu = \int (\varphi_n - \psi_n) d\mu =$$

$$= \int \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} \chi_{E_k} d\mu = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} \mu(E_k) = \frac{M}{n}\mu(E)$$

כלומר לכל n מתקיים $0\le B-A\le \frac{M}{n}\mu(E)$ ולכן, $B=A$.

$\square$

הגדרה. אם f פונקציה מדידה וחסומה המתאפסת מחוץ לקבוצה בעלת מידה סופית, נגדיר:

$$\int_x f d\mu := A = B$$

$$\int_E f d\mu := \int_x f \chi_E d\mu$$

נתבונן במרחב המידה $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$. תהי f פונקציה אינטגרבילית רימן. בפרט f חסומה על קטע סגור, ולכן מדידה לפי לבג. נוכל כעת לחשב את האינטגרל כפי שהוגדר לעיל. למרבה ההפתעה הם היו שווים.
מצד שני, קיימת f, חסומה ומדידה לפי לבג עבורה אין פונקציה g חסומה ורציפה כמעט בכל מקום על $[0,1]$ המקיימת $f = g$ כמעט בכל מקום (באחד מתרגילי בית). לכן יש פונקציות שכעת אנחנו יודעים לעשות להן אינטגרל ולא ידענו לעשות להן אינטגרל רימן.
מה קורה בעצם אם f עצמה פשוטה? אולי הכל נהרס? אבל זה בסדר. הרי f עצמה היא בקבוצה עליה עושים את הסופרמום וגם בקבוצה עליה עושים את האינפימום. אז למעשה האינטגרל של f כפונקציה פשוטה חוסם מלמעלה ומלמטה את האינטגרל החדש של f.
נראה כמה תכונות של האינטגרל:

משפט. תהיינה $f, g : X \to \mathbb{R}$ מדידות, חסומות ומתאפסות מחוץ לקבוצה בעלת מידה סופית, ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. מתקיים:

1. $\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu$.
2. אם $f \geq g$ כמעט בכל מקום אזי $\int f d\mu \geq \int g d\mu$. בפרט $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$.
3. אם $f = g$ כמעט בכל מקום אזי $\int f d\mu = \int g d\mu$.
4. אם f מתאפסת מחוץ ל- $E \in \Sigma$ כאשר $\mu(E) < \infty$ ו- $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ לכל $x \in E$ אזי $\alpha\mu(E) \leq \int f d\mu \leq \beta\mu(E)$.
5. אם $E_1 \cup E_2 = X$, כאשר $E_1, E_2 \in \Sigma$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ אזי
$$\int_x f d\mu = \int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu$$

הוכחה.

1. תהי $\alpha > 0$ אזי

$$\int \alpha f d\mu =$$
$$= \sup_{\psi} \left\{ \int_x \psi d\mu : \text{פשוטה, מדידה, מתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה סופית } \psi; \quad \psi \leq \alpha f \right\} =$$
$$= \sup_{\psi} \left\{ \alpha \int_x \psi d\mu : \text{פשוטה, מדידה, מתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה סופית } \psi; \quad \psi \leq f \right\} =$$
$$= \alpha \sup_{\psi} \left\{ \int_x \psi d\mu : \text{פשוטה, מדידה, מתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה סופית } \psi; \quad \psi \leq f \right\} =$$
$$= \alpha \int f d\mu$$

תהי $\alpha < 0$ אזי

$$\int \alpha f d\mu =$$

$$= \sup_{\psi} \left\{ \int_x \psi d\mu : \text{פשוטה, מדידה, מתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה סופית } \psi; \quad \psi \leq \alpha f \right\} =$$

$$= \sup_{\psi} \left\{ \alpha \int_x \psi d\mu : \text{פשוטה, מדידה, מתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה סופית } \psi; \quad \psi \geq f \right\} =$$

$$= \alpha \inf_{\psi} \left\{ \int_x \psi d\mu : \text{פשוטה, מדידה, מתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה סופית } \psi; \quad \psi \geq f \right\} =$$

$$= \alpha \int f d\mu$$

ברור שאם f, g חסומות, מדידות ומתאפסות מחוץ לקבוצה ממידה סופית אז גם $f + g$ היא חסומה, מדידה ומתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה סופית. ניקח ψ_1, ψ_2 כך ש- $\psi_1 \leq f$, $\psi_2 \leq g$. מכאן $\psi_1 + \psi_2 \leq f + g$

כלומר, לכל ψ_1, ψ_2:

$$\int (f+g) d\mu \geq \int (\psi_1 + \psi_2) d\mu = \int \psi_1 d\mu + \int \psi_2 d\mu$$

מכאן,

$$\int (f+g) d\mu \geq$$

$$\geq \sup_{\psi_1} \left\{ \int_x \psi_1 d\mu : \text{פשוטה, מדידה, מתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה סופית } \psi_1; \quad \psi_1 \leq f \right\} +$$

$$+ \sup_{\psi_2} \left\{ \int_x \psi_2 d\mu : \text{פשוטה, מדידה, מתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה סופית } \psi_2; \quad \psi_2 \leq g \right\} =$$

$$= \int f d\mu + \int g d\mu$$

באופן דומה תהיינה φ_1, φ_2 כך ש- $\varphi_1 \geq f$, $\varphi_2 \geq g$ ונקבל $\int (f+g) d\mu \leq \int (\varphi_1 + \varphi_2) d\mu$

2. $f \geq g$ כמעט בכל מקום. לכן $f - g \geq 0$ כמעט בכל מקום. תהי φ פשוטה, מדידה

המתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה סופית, כך ש- $\varphi \geq f - g$. כעת,

$$\int f - g d\mu =$$

$$= \inf_{\varphi} \left\{ \int_x \psi d\mu : \text{פשוטה, מדידה, מתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה סופית } \varphi; \quad \varphi \geq f - g \right\}$$

מצד שני, $\varphi \geq f - g$ לכן $\varphi \geq 0$ כמעט בכל מקום. כלומר איברי הקבוצה

$$\left\{ \int_x \psi d\mu : \text{פשוטה, מדידה, מתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה סופית } \varphi; \quad \varphi \geq f \right\}$$

הם כולם אי־שליליים לכן גם האינפימום אי־שלילי. כלומר $\int f - g d\mu \geq 0$. נשלב עם הסעיף הקודם:

$$\int f d\mu - \int g d\mu = \int (f - g) d\mu \geq 0$$

3. מיידי מהסעיף הקודם. $f - g = 0$ כמעט בכל מקום כלומר מצד אחד $f - g \geq 0$ כעמט בכל מקום ומצד שני $f - g \leq 0$ כמעט בכל מקום.

4. $\alpha\chi_E \leq f \leq \beta\chi_E$. על פי הסעיפים הקודמים:

$$\alpha\mu(E) = \alpha \cdot \int \chi_E d\mu = \int \alpha\chi_E d\mu \leq$$
$$\leq \int f d\mu \leq$$
$$\leq \int \beta\chi_E d\mu = \beta \cdot \int \chi_E d\mu = \beta\mu(E)$$

5.

$$\int f d\mu = \int f(\chi_{E_1} + \chi_{E_2}) d\mu = \int f\chi_{E_1} d\mu + \int f\chi_{E_2} d\mu$$

כלומר האינטגרל הוא אדיטיבי.

$\square$

נמקנו את הצורך באינטגרל חדש בחוסר משפטי גבול על אינטגרל רימן. ובאמת ראינו דוגמאות של פונקציות אינטגרביליות רימן שמתכנסות לפונקציה שאינה אינטגרבילית רימן. סיבה נוספת היא החלפת סדר בין גזירה לאינטגרציה. מאוחר יותר נראה שיש נגזרות חסומות שאינן אינטגרביליות רימן.
מצד שני כבר עכשיו נוכל לנסח משפט יותר טוב על גבול אינטגרלים:

משפט. (משפט ההתכנסות החסומה) תהי $\{f_n\}$ סדרה של פונקציות מדידות המתאפסות מחוץ לקבוצה בעלת מידה סופית, המתכנסת כמעט בכל מקום ל-f. נניח כי קיים M עבורו

$$|f(x)| < M$$

לכל $x \in X$ ולכל $n \in \mathbb{N}$. אזי:

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

הוכחה. נניח כי כל f_n מתאפסת מחוץ ל- $E \in \Sigma$ $\mu(E) < \infty$. יהי $\varepsilon > 0$. נשתמש במשפט אגורוב. קיימת $F \in \Sigma$ כך ש- $F \subseteq E$ וכן $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$ כך ש- $\{f_n\}$ מתכנסת במידה שווה על F ל- f.

$$\int (f - f_n)d\mu = \int\limits_E (f - f_n)d\mu = \int\limits_F (f - f_n)d\mu + \int\limits_{E\setminus F} (f - f_n)d\mu$$

ההתכנסות היא במידה שווה לכן קיים N עבורו $\forall x \in F$:

$$n > N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \le \varepsilon$$

ויתר על כן, לכל $x \in E$ מתקיים $|f(x) - f_n(x)| \le 2M$.
ניקח $n > N$.

$$\left|\int (f - f_n)d\mu\right| \le \left|\int\limits_F (f - f_n)d\mu\right| + \left|\int\limits_{E\setminus F} (f - f_n)d\mu\right| \le$$
$$\le \int\limits_F |f - f_n|d\mu + \int\limits_{E\setminus F} |f - f_n|d\mu \le \varepsilon\mu(F) + 2M\mu(E \setminus F) \le \varepsilon\mu(E) + 2M\varepsilon$$

ולכן הגבול המבוקש נובע. □

מה קורה אם הפונקציה שלנו לא מתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה סופית? נבחר להתעלם מהמקרים הפתולוגיים באמת. נדבר על מרחבי מידה סופיים למחצה.

הגדרה. מרחב מידה (X, Σ, μ) ייקרא סופי למחצה אם לכל $E \in \Sigma$ מתקיים:

$$\mu(E) = \sup\{\mu(F) : F \in E;\ F \subseteq E;\ \mu(F) < \infty\}$$

לדוגמא מרחב מידת לבג הוא סופי למחצה.
האם יש מרחבי מידה שאינם סופיים למחצה? כן.

דוגמא. עבור X כלשהו ו- $x_0 \in X$, מרחב המידה $(X, P(X), \mu)$

$$\mu(E) := \begin{cases} 0, & x_0 \in E \\ \infty, & x_0 \in E \end{cases}$$

כעת נוכל להגדיר אינטגרל:

הגדרה. תהי f מדידה ו- $f \geq 0$. נגדיר:

$$\int_x f d\mu := \sup\{\int h d\mu : \text{מדידה, חסומה, מתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה סופית } h;\ h \leq f\}$$

ההגדרה הזאת באמת לא מסתדרת עם המקרים הפתולוגי.
אם f אי־שלילית, מדידה, חסומה ומתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה סופית, האם ההגדרה חדשה מסתדרת עם ההגדרה הישנה של האינטגרל? כן. האינטגרל של f עצמה הוא בדיוק הסופרמום.
נראה תכונות:

משפט. נניח f, g מדידות, אי־שליליות ו- $\alpha > 0$. אזי:

1. $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$.
2. $\int g d\mu + \int f d\mu = \int (f+g) d\mu$.
3. אם $f \geq g$ כמעט בכל מקום אזי $\int f d\mu \geq \int g d\mu$.

הוכחה.

1. בדומה לתכונה עבור איטגרל של פונקציות מדידות, חסומות ומתאפסות מחוץ לקבוצה ממידה סופית.
2. נניח k, h מדידות, חסומות ומתאפסות מחוץ לקבוצה ממידה סופית, $f \geq h$, $g \geq k$, $f + g \geq h + k$.

   גם $h + k$ מדידה, חסומה ומתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה סופית.

$$\int (f+g) d\mu \geq \int (h+k) d\mu = \int h d\mu + \int k d\mu$$

$$\int (f+g) d\mu \geq \int f d\mu + \int g d\mu$$

תהי l מדידה, חסומה ומתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה סופית $l \leq g + f$. נגדיר

$$h := f \wedge l (h := \min\{f, l\})$$

$$k := l - h$$

כלומר $l \leq h \leq l$ ו- $-2l \leq k \leq 2l$ חסומות ומדידות.

$$k(x) = 0 \Leftarrow h(x) \Leftarrow l(x) = 0$$

לכן גם מתאפסות מחוץ לקבוצה ממידה סופית.

אם $h(x) = f(x) \leq l(x)$ אזי

$$k(x) = l(x) - f(x) \leq f(x) + g(x) - f(x) = g(x)$$

אם $h(x) = l(x) \leq f(x)$ אזי

$$k(x) = 0 \leq g(x)$$

h משתתפת בהגדרת האינטגרל של f, k משתתפת בהגדרת האינטגרל של g.

$$\int l d\mu \leq \int (h+k) d\mu = \int h d\mu + \int k d\mu \leq \int f d\mu + \int g d\mu$$

$$\int (f+g) d\mu =$$

$$= \sup_l \{ \int l d\mu : \text{מדידה, חסומה, מתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה סופית} \; l; \; l \leq f+g \} \leq$$

$$\leq \int f d\mu + \int g d\mu$$

3. תהי h מדידה, חסומה ומתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה סופית כך ש- $h \leq fg$ אז $h \leq f$ כמעט בכל מקום.

נגדיר $\hat{h} := \min\{h, f\}$ מדידה, חסומה ומתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה סופית, כי $h = \hat{h}$ כמעט בכל מקום.

$$\int f d\mu \geq \int \hat{h} d\mu = \int h d\mu$$

לכן,

$$\int f d\mu \geq$$

$$\geq \sup \{ \int h d\mu : \text{מדידה, חסומה, מתאפסת מחוץ לקבוצה ממידה סופית} \; h; \; h \leq g \} =$$

$$= \int g d\mu$$

לכן $\int f d\mu \geq \int g d\mu$.

$\square$