פונקציות ממשיות ־ הרצאה 8

9.11.10

נרצה להתחיל לדבר על הרחבה של אינטגרל רימן. נתחיל מלדבר על פונקציות פשוטות.
יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה ותהי $\varphi = \sum\limits_{n=1}^{n} a_i\chi_{E_i}$ פונקציה פשוטה ו– $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ קבוצות מדידות.
היינו רוצים להגדיר את האינטגרל להיות

$$\int \varphi d\mu = \Sigma a_i\mu(E_i)$$

אבל אם נגדיר כך יש לנו בעיה. ייתכן ויש לפונקציה שלנו יותר מייצוג אחד. האם בכל ייצוג נקבל אותו הסכום? כן.
אבל זה דורש הוכחה. כדי מראש למנוע אי־נעימות, נשתמש בהגדרה קצת אחרת.

הגדרה. נניח φ פונקציה פשוטה ויהיו $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ הערכים השונים שהיא מקבלת, השונים מ–0.
נסמן:

$$A_i := \{x\in X : \varphi(x)=\alpha_i\}$$

כעת כמובן שמתקיים:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}$$

וזאת נקראת ההצגה הקנונית של φ.

הגדרה. תהי φ פונקציה פשוטה המתאפסת מחוץ לקבוצה בעלת מידה סופית. תהי

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}$$

ההצגה הקנונית.
נגדיר:

$$\int_x \varphi(x)d\mu(x) := \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(A_i)$$

ונכתוב בקיצור

$$\int \varphi d\mu$$

אז מה הייתה הדרישה המוזרה "פונקציה פשוטה המתאפסת מחוץ לקבוצה בעלת מידה סופית"?
ובכן, זה אומר שכל A_i הוא ממידה סופית. למה זה טוב?
אם בפתאומיות

$$\alpha_1 = 1, \quad \mu(A_1) = \infty$$
$$\alpha_2 = -1, \quad \mu(A_2) = \infty$$

נקבל בסכום $\infty - \infty$ וזה מצב שאנחנו לא כל כך אוהבים, לכן נדחה את הטיפול בו.

הערה. אם ϕ אי־שלילית כמעט בכל מקום אזי

$$\int \varphi d\mu \geq 0$$

הסבר בזק ־ גורמים α_i שליליים יוכפלו בסכום רק במידה של קבוצה אפסית. שאר הערכים הם אי־שליליים ויוכפלו במידות של קבוצות (שכמובן אי־שליליות).

נחזור לבעיה שהזכרנו בהתחלה – אי־יחידות ההצגה של פונקציה פשוטה.

למה. תהי φ פונקציה פשוטה המתאפסת מחוץ לקבוצה בעלת מידה סופית, ותהי $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ סדרה של פונקציות זרות בזוגות, ו־

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i)$$

וכל $a_i > 0$, אזי

$$\int \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i)$$

הוכחה. תהי

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}$$

ההצגה הקנונית.
לכל j נגדיר:

$$K_j := \{i : a_i = \alpha_j\}$$

$\{K_j\}$ זרות שתיים־שתיים.
כמובן,

$$\bigcup_{j=1}^{m} K_j = \{1, \ldots, n\}$$

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(A_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(\bigcup_{i\in K_j} E_i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \sum_{i\in K} \mu(E_i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_j \sum_{i\in K} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i)$$

$\square$

שתי תכונות פשוטות של האינטגרל:

למה. תהיינה φ, ψ פונקציה פשוטות המתאפסות מחוץ לקבוצה בעלת מידה סופית ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. $\int(\alpha\varphi + \beta\psi)d\mu = \alpha\int\phi d\mu + \beta\int\psi d\mu$
2. אם $\phi \geq \psi$ כמעט בכל מקום אז

$$\int \psi d\mu \geq \int \psi d\mu$$

הוכחה. 1. יהיו $\{A_j\}_{j=1}^{n}$ הקבוצות המופיעות בהצגה הקנונית של φ. כלומר,
יהיו $\{B_i\}_{i=1}^{m}$ הקבוצות המופיעות בהצגה הקנונית של ψ.
נגדיר:

$$A_0 = X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j$$

$$B_0 = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

כעת

$$\{A_j \cap B_i : 0 \leq j \leq n,\ \ 0 \leq i \leq m\}$$

זרות שתיים־שתיים, ועל כל אחת מהן ψ, φ קבועות.
יתר על כן,

$$\psi|_{A_0\cap B_0} \equiv \varphi|_{A_0\cap B_0} \equiv 0$$

הפונקציה $\alpha\varphi+\beta\psi$ קבועה על הקבוצות $A_j\cap B_j$ ומתאפסת על $A_0\cap B_0$.
נספור את הקבוצות $A_j\cap B_i$ עבור $(i,j)\neq(0,0s)$:

$$E_1,\dots,E_k$$

והערכים של φ על הקבוצות האלה הם $a_1,\dots,a_k$, והערכים של ψ על הקבוצות האלה הם $b_1,\dots,b_k$.
נוכל לכתוב:

$$\varphi=\sum_{r=1}^{n}a_r\chi_{E_r}$$

$$\psi=\sum_{r=1}^{n}b_r\chi_{E_r}$$

כעת,

$$\alpha\varphi+\beta\psi=\sum_{r=1}^{k}(\alpha a_r+\beta a_r)\chi_{E_r}$$

ולבסוף:

$$\int(\alpha\varphi+\beta\psi)d\mu=\sum_{r=1}^{n}(\alpha a_r+\beta b_r)\mu(E_r)=$$

$$=\alpha\sum_{r=1}^{n}a_r\mu(E_r)+\beta\sum_{r=1}^{n}b_r\mu(E_r)=\alpha\int\varphi d\mu+\beta\int\psi d\mu$$

2. על פי הסעיף הקודם:

$$\int\psi d\mu-\int\varphi d\mu=\int(\psi-\phi)d\mu$$

הפונקציה $\psi-\phi$ אי־שלילית כמעט בכל מקום, לכן מההערה הקודמת האינטגרל אי־שלילי.

$\square$

הערה. מאינדוקציה התכונה 1 נכונה לכל סכום סופי של אינטגרלים.

מסקנה. (חשובה)
אם $\varphi=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}$ היא פונקציה פשוטה המתאפסת מחוץ לקבוצה בעלת מידה סופית אזי

$$\int\varphi d\mu=\sum_{i=1}^{n}a_i\mu(E_i)$$

במה זה שונה מההגדרה? עבור $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ התעלמנו לגמרי מזרות שתיים־שתיים, העיקר שתהיינה מדידות.
מדוע? כל מחובר הוא פונקציה פשוטה, לכן מהתכונות הכל נובע.

עד כאן אינטגרל של פונקציות פשוטות. ובאמת, כמה אפשר?