פונקציות ממשיות - הרצאה 7

7.11.10

השיעור נדון על מרחב מידה כללי (X, Σ, μ).

משפט. ***(Egorov)***
נניח $\mu(X) < \infty$. אם $\{f_n\}$ סדרה של פונקציות מדידות המתכנסות כמעט בכל מקום לפונקציה f סופית כמעט בכל מקום ו- $\varepsilon > 0$, אזי קיימת קבוצה $E \in \Sigma$ המקיימת:

1. $\mu(X \setminus E) < \varepsilon$.
2. $\{f_n\}$ מתכנסת ל- f במידה שווה על E.

הוכחה. ללא הגבלת כלליות נניח כי f סופית על כל X (הרי מתעלמים למקבוצה ממידה 0).
רוצים להראות התכנסות במידה שווה, אז נתמקד בזנב הסדרה.
יהיו $p, k \in \mathbb{N}$ נגדיר:

$$E_{p,k} := \bigcap_{n=p}^{\infty} \{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}\}$$

הקבוצות מדידות כי פונקציית הגבול מדידה, הפרש פונקציות מדידות הוא מדיד וכן ערך מוחלט של פונקציה מדידה הוא מדיד.
נראה שכמעט כל נקודה מ- X נמצאת באיחוד: $\bigcup\limits_{p=1}^{\infty} E_{p,k}$.
כלומר, אם $x \in X$ עבורו מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ (וזה קורה כמעט בכל נקודה) אזי $x \in \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} E_{p,k}$.
מדוע? כי לכל x כנ"ל קיים p שעבורו לכל $n \geq p$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$$

זאת אומרת, $x \in E_{p,k}$.
ההתכנסות היא כמעט בכל מקום לכן

$$\mu(X \setminus \bigcup_{p=1}^{\infty} E_{p,k}) = 0$$

כלומר, $\mu(\bigcap\limits_{p=1}^{\infty} (X \setminus E_{p,k})) = 0$. עבור k קבוע הסדרה $\{E_{p,k}\}$ עולה, כלומר

$$E_{p,k} \subseteq E_{p+1,k}$$

מדוע? עבור $x \in E_{p,k}$ הוא נמצא הכל איברי החיתוך החל מ- p. בפרט הוא בכל איברי החיתוך גם החל מ- $p+1$.
לכן, סדרת המשלימים $X \setminus E_{p,k}$ היא סדרה יורדת. מתקיים השוויון:

$$\lim_{p\to\infty} \mu(X \setminus E_{p,k}) = \mu(\bigcap_{p=1}^{\infty} (X \setminus E_{p,k})) = 0$$

(כאן השתמשנו ב- $\mu(X) < \infty$).
לכן קיים n_k עבורו $\mu(X \setminus E_{n_k,k}(< \frac{\varepsilon}{2^k}$.
נגדיר $E := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_{n_k,k}$.

$$\mu(X \setminus E) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} (X \setminus E_{n_k,k})) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X \setminus E_{n,k}) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

לכל k $E \subseteq E_{n_k,k}$ לכן לכל $x \in E$ מתקיים $x \in E_{n_k,k}$, כלומר לכל $n \geq n_k$ מתקיים $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}$.
נשים לב ש n_k אינו תלוי ב-x לכן ההתכנסות היא במידה שווה.
□

נראה שהתנאי של $\mu(X) < \infty$ הוא הכרחי.
עבור $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ וסדרת פונקציות הבאה: $\{\chi_{[n,\infty)}\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית ל-0 (על $\mathbb{R}$).
אבל לא משנה איזו חתיכה קטנה של הישר נוציא לא נקבל התכנסות במידה שווה.
מדוע? לכל n נתבונן ב-

$$\{x \in \mathbb{R} : |0 - \chi_{[n,\infty)}(x)| > \frac{1}{2}\} = [n, \infty)$$

לכן

$$m(\{x \in \mathbb{R} : |0 - \chi_{[n,\infty)}(x)| > \frac{1}{2}\}) = m([n, \infty)) = \infty$$

כל חתיכה שנוציא היא ממידה סופית, בפרט עדיין על רוב הקרן יתקיים אי־השוויון הנ"ל שמונע התכנסות במידה שווה.
מעתה והלאה נדבר רק על פונקציות סופיות כמעט בכל מקום. אפילו נפסיק לציין זאת.

מסקנה. $\mu(x) < \infty$. תהי $\{f_n\}$ סדרה של פונקציות מדידות המתכנסות במידה שווה ל- f.
אזי לכל $\alpha > 0$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| > \alpha\}) = 0$$

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$ אזי קיימת $E \in \Sigma$ כמו במשפט אגורוב. כלומר, קיים N_α המקיים:

$$n > N_\alpha \Rightarrow \forall x \in E |f(x) - f_n(x)| \leq \alpha$$

מהתכנסות במידה שווה. לכן ללא כל ספק:

$$\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| > \alpha\} \subseteq X \setminus E$$

אבל עבור $n > N_\alpha$: $\mu(X \setminus E) < \varepsilon$ בפרט גם

$$\mu(\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| > \alpha\}) < \varepsilon$$

$\square$

המשפט היה מעניין. המסקנה הייתה מעניינת. כהרגלנו נגדיר:

הגדרה. נאמר שסדרה $\{f_n\}$ של פונקציות מדידות מתכנסת במידה לפונקציה f, אם לכל $\alpha > 0$ מתקיים :

$$\lim_{n\to\infty} \mu(x \in X : |f(x) - f_n(x)| > \alpha) = 0$$

כעת ננסח מחדש:
אם $\mu(X) < \infty$ ויש התכנסות במידה שווה אזי יש התכנסות במידה.
הטענה ההפוכה אינה נכונה.

דוגמא. סדרה של פונקציות מדידות מעל $([0,1], \mathcal{L}, m)$. לכל n טבעי יש פירוק יחיד $n = 2^p + k$ כאשר $p = 0, 1, 2, \ldots$ ו- $0 \le k < 2^p$.
כלומר, כל n טבעי נכנס לאחד ורק אחד הקטעים $[2^p, 2^{p+1})$.
נגדיר:

$$f_n(x) = \chi_{[k\cdot 2^{-p}, (k+1)2^{-p}]}(x)$$

יהי n כלשהו. אזי קיים p עבורו $2^p \le n^{p+1}$. נחלק את הקטע $[0,1]$ לקטעים שווים באורך 2^{-p}.
הסדרה $\{f_n\}$ מתכנסת במידה ל-0.
מדוע? נתבונן ב-$\{x \in [0,1] : |0 - f_n(x)| > \alpha\}$.
עבור $\alpha > 1$ הקבוצה הנ"ל ריקה.
עבור $\alpha \le 1$ מתקיים:

$$\{x \in [0,1] : |0 - f_n(x)| > \alpha\} \subseteq [k \cdot 2^{-p}, (k+1) \cdot 2^{-p}]$$

לכן

$$m(\{x \in [0,1] : |0 - f_n(x)| > \alpha\}) \le m([k \cdot 2^{-p}, (k+1) \cdot 2^{-p}]) = 2^{-p} < \frac{2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

כאשר אי־השוויון האחרון נובע מכך ש-$n < 2 \cdot 2^p$ אזי יש התכנסות במידה.
מאידך, $\forall x \in [0,1]$ הסדרה $\{f_n\}$ אינה מתכנסת נקודתית בכלל לאף פונקציה.
מדוע? נקבע $x \in [0,1]$. נראה כי ישנה תת־סדרה של $\{f_n\}$ שהיא 0 ותת סדרה נוספת שהיא 1.
לכל p יש k כך שהנקודה נופלת בקטע והערך הוא 1. ליתר ה-k הערך הוא 0.

הערה. נשים לב לבעית מינוח בעברית בין התכנסות במידה (in measure) שעליה למדנו היום לבין התכסנות במידה שווה (uniform) שעליה דברנו בחדו"א 2.

משפט. תהי $\{f_n\}$ סדרה של פונקציות מדידות המתכנסות במידה ל- f. אזי קיימת תת־סדרה $\{f_{n_p}\}$ המתכנסת ל- f כב"מ.

הוכחה. $\forall p \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| > 2^{-p}\}) = 0$$

כלומר קיים $p \in \mathbb{N}$ עבורו

$$n \geq p_0 \Rightarrow \mu(\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| > 2^{-p}\}) < 2^{-p}$$

נניח כי סדרת n_p היא עולה $\forall p n_p < n_{p+1}$ (אחרת פשוט נזרוק את האיברים הלא מתאימים).
נגדיר

$$E_p := \{x \in X : |f(x) - f_{n_p}(x)| > 2^{-p}\}$$

ולכן

$$\mu(E_p) < 2^{-p}$$

יהי $k \in \mathbb{N}$ ויהי $x \notin \bigcup_{p=k}^{\infty} E_p$
אזי עבור $p \geq k$

$$|f(x) - f_{n_p}(x)| \leq 2^{-p}$$

לכן $\lim_{p\to\infty} f_{n_p}(x) = f(x)$
נגדיר:

$$E := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{p=k}^{\infty} E_p \in \Sigma$$

לכן עבור k מסויים:

$$x \notin E \Rightarrow x \notin \bigcup_{p=k}^{\infty} E_p$$

$$\Rightarrow \lim_{p\to\infty} f_{n_p}(x) = f(x)$$

מחוץ ל- E יש התכנסות נקודתית. לכל k מההכלה

$$\mu(E) \leq \bigcup_{p=k}^{\infty} (E_p)$$

כלומר לכל k

$$\mu(E) \leq \sum_{p=k}^{\infty} E_p \leq \sum_{p=k}^{\infty} 2^{-p} = 2^{-k+1}$$

לכן $\mu(E) = 0$. □

למה. אם $\{f_n\}$ מתכנסת ל- f במידה, ו- $g = f$ כמעט בכל מקום. אזי הסדרה $\{f_n\}$ מתכנסת במידה גם ל- g.

הוכחה. תרגיל.

למה. אם $\{f_n\}$ מתכנס במידה ך- f ול- g אזי $f = g$ כמעט בכל מקום.

הוכחה. יהי $\alpha > 0$ נתבונן ב-

$$\begin{aligned}&\{x \in X : |f(x) - g(x)| > \alpha\} \subseteq \\ &\qquad \subseteq \{x \in X : |f(x) - f_n(x)| > \frac{\alpha}{2}\} \cup \{x \in X : |f_n(x) - g(x)| > \frac{\alpha}{2}\}\end{aligned}$$

לכן,

$$\begin{aligned}&\mu(\{x \in X : |f(x) - g(x)| > \alpha\}) \leq \\ &\qquad \leq \mu(\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| > \frac{\alpha}{2}\}) + \mu(\{x \in X : |f_n(x) - g(x)| > \frac{\alpha}{2}\})\end{aligned}$$

נשאיף $n \to \infty$ את שני האגפים:

$$\mu(\{x \in X : |f(x) - g(x)| > \alpha\}) \leq 0 + 0$$

כלומר לכל $\alpha > 0$ $\mu(\{x \in X : |f(x) - g(x)| > \alpha\}) = 0$.
לכן,

$$\{x \in X : |f(x) - g(x)| > 0\} = \bigcup_{k=1}^{p} \{|f(x) - g(x)| > \frac{1}{k}\}$$

ולכן,

$$\mu(\{x \in X : |f(x) - g(x)| > 0\}) \leq \mu(\bigcup_{k=1}^{p} \{|f(x) - g(x)| > \frac{1}{k}\} > 0) = \sum 0 = 0$$

□

משפט. ***(Luzin)*** במרחב מידה $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ תהי $f : E \to [-\infty, \infty]$ מדידה (סופית כמעט בכל מקום) $E \subseteq \mathbb{R}$ מדידה.
לכל $\varepsilon > 0$ קיימת F סגורה המקיימת $F \subseteq E$, $m(E \setminus F) < \varepsilon$ וכן $f|_F$ רציפה.

הוכחה. נוכיח בשלבים.

1. נניח כי $f = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$ כאשר $\{E_i\}$ זרות בזוגות.

קיימות F_i סגורות כך ש- $F_i \subseteq E_i$ כך ש- $m(E_i \setminus F_i) < \frac{\varepsilon}{n+1}$.

נגדיר $F := \bigcup\limits_{i=0}^{n} F_i \subseteq E$ סגורה.

$$m(E \setminus F) = m(\bigcup_{i=0}^{n} (E_i \setminus F_i)) \leq \sum_{i=0}^{n} m(E_i \setminus F_i) \leq \varepsilon$$

$f|_{F_i}$ היא פונקציה קבועה לכן $f|_F$ רציפה.

2. f כלשהי, אבל $m(E) < \infty$.

קיימת סדרה של פונקציות פשוטות $\{\varphi_n\}$ המתכנסות נקודתית ל- f על E.

על פי חלק קודם לכל n קיימת תת־קבוצה סגורה $F_n \subseteq E$ המקיימת

$$m(E \setminus F_{n+1} < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}})$$

וכן $\varphi_n|_{F_n}$ היא פונקציה רציפה.

נגדיר $H := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ קבוצה סגורה.

$$m(E \setminus H) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E \setminus F_n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(E \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\varphi_n|_H$ רציפה כי $H \subseteq F_n$.

רוצים שהכל יהיה רציף. ממשפט אגורוב קיימת $G \subseteq H$ המקיימת $m(H \setminus G) < \frac{\varepsilon}{4}$ ו- $\{\varphi_n\}$ מתכנסת ל-f במידה שווה על G.

קיימת $F \subseteq G$ סגורה המקיימת $m(G \setminus F) < \frac{\varepsilon}{4}$

$\varphi_n|_F$ רציפה לכל n.

$\{\varphi_n\}$ מתכנסת במידה שווה על F ל- f לכן $f|_F$ רציפה ומתקיים:

$$m(E \setminus F) = m((E \setminus H) \cup (H \setminus G) \cup (G \setminus F)) < \varepsilon$$

3. f כלשהי ו- E כלשהי.

יהי $k \in \mathbb{Z}$ נגדיר:

$$E_k := E \cap [k, k+1 - \frac{\varepsilon}{2^{|k|+2}})$$

מדידה ויתר על כן, ממידה סופית.

$$m(E \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} E_k) \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\varepsilon}{2^{|k|+2}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

על פי חלק קודם לכל $k \in \mathbb{Z}$ קיית $F_k \subseteq E_k$ סגורה המקיימת $m(E_k \setminus F_k) < \frac{\varepsilon}{2^{|k|+2}}$ $f|_{F_k}$ רציפה לכל $k \in \mathbb{Z}$.

נגדיר $F := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} F_k$ סגורה.

מדוע? הקבוצות רחוקות. תהי $x \in \bar{F}$. נבחר קטע פתוח חסום המכיל את x. הוא חותך רק משפחה סופית של קבוצות F_k אז למעשה x בסגור של משפחה סופית שהיא איחוד סופי של קבוצות סגורות לכן x באחת הקבוצות.

נראה כי $f|_F$ רציפה. לכל k $f|_{F_k}$ רציפה וכן

$$m(E \setminus F) \leq m(E \setminus \bigcup E_k) + m(\bigcup E_k \setminus \bigcup F_k) <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_k m(E_k \setminus F_k) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum \frac{\varepsilon}{2^{|k|+2}} < \varepsilon$$

$$\bigcup F_k \subseteq \bigcup E_k \subseteq E$$

□